
Een grondige studie van linguïstische wijzigers in de vaagverzamelingenleer

Martine De Cock

Licentiaat in de Informatica, optie Formele Informatica
Geaggregeerde voor het Secundair Onderwijs -
Groep 2 in de Informatica

Proefschrift voorgelegd aan
de Faculteit Wetenschappen van de Universiteit Gent
tot het krijgen van de graad van
Doctor in de Wetenschappen, richting Informatica

Promotor:

Prof. Dr. Etienne E. Kerre

maart 2002



Faculteit Wetenschappen

Ik zal de halmen niet meer zien
noch binden ooit de volle schoven,
maar doe mij in de oogst geloven
waarvoor ik dien.

Opdat, nog in de laatste voor,
ik weten mag dat mij uw doel verkoor
te zijn een ernstig ploeger op de landen
van een te worden schoonheid.

(Uit “De ploeger”
Adriaan Roland Holst)

Science is about
what’s in your head
and the accurate, honest
expression of that.

(Brian Gaines)

Inhoudsopgave

Voorwoord	7
1 Inleiding	9
2 Basisbegrippen	17
2.1 Enkele ordetheoretische concepten	17
2.2 Logische operatoren op begrensde tralies	21
Negatoren, triangulaire normen en conormen	23
Implicatoren	26
2.3 Basisbegrippen uit de L -vaagverzamelingenleer	33
2.4 Enkele afspraken	37
3 Van linguïstische wijzigers naar vaagwijzigers	39
3.1 Linguïstische veranderlijken	39
3.2 Typische lidmaatschapsfuncties	43
3.3 Eisen en verwachtingen	45
3.4 De constructie van lidmaatschapsfuncties	54
Kennisedreven methoden	54
Datagedreven methode	57
4 Vaagwijzigers van de eerste generatie	59
4.1 Uitbreidende en beperkende wijzigers	59
4.2 Opsplitsbare wijzigers	60
4.3 Voorbeelden	63
4.4 Verheffende vaagwijzigers	65
4.5 Verschuivende vaagwijzigers	70
4.6 Besluit	72
5 Gelijkaardigheidsrelaties	75
5.1 De Poincaré paradox	75
5.2 L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties en de Poincaré paradox	76
5.3 Benaderende gelijkheid	79
5.4 Afstandsfuncties	81
5.5 Gelijkaardigheidsrelaties	83

6	De Horizonaanpak	89
6.1	Inleiding	89
6.2	Het horizonconcept	91
6.3	Inclusieve interpretatie	99
6.4	Niet-inclusieve interpretatie	103
6.5	Voor- en nadelen	105
7	Vaagrelationele Wijzigers	107
7.1	Inleiding	107
7.2	L -vaagrelationele beelden	108
7.3	Verband met samenstellen van L -vaagrelaties	111
7.4	Eigenschappen van L -vaagrelationele beelden	113
	Monotonicititeit	113
	Interactie met doorsnede	114
	Interactie met unie	119
	Interactie met complement	123
	Beeld van universum en lege verzameling	127
7.5	Eigenschappen van beelden onder L -vaagrelaties in één universum	128
	Expansiviteit en restrictiviteit	128
	Idempotentie	129
	Gemengde beelden	131
	Gedrag t.o.v. drager en kern	133
7.6	Inclusieve interpretatie	134
	Representatieschema's	134
	Voorbeelden	139
7.7	Niet-inclusieve interpretatie	144
8	Gewijzigde vaagverzamelingen in een ruimer kader	147
8.1	Inleiding	147
8.2	Openings- en sluitingsoperatoren	148
8.3	Vaagtopologie	153
8.4	Vaagmorfologie	158
8.5	Vaagruwverzamelingenleer	160
	Samenvatting	169
	Summary	171

TOELATING TOT BRUIKLEEN

De auteur geeft de toelating dit proefschrift voor consultatie beschikbaar te stellen en delen ervan te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit dit werk.

De auteur

Voorwoord

Zoals mij voorspeld was, heb ik heel erg genoten van het gedetailleerd kunnen uitschrijven van mijn onderzoeksresultaten in dit proefschrift. Het aangenaamste om te schrijven waren echter de bladzijden die u nu aan het lezen bent, niet alleen omdat ik ze op het allerlaatste uitgetikt heb, maar vooral omdat ik het zo fijn vind om iedereen die de afgelopen vier jaar veel voor mij betekend heeft eens uitdrukkelijk te danken. Mijn grootste dank gaat uit naar mijn promotor, professor Etienne E. Kerre. Ik kan onomwonden zeggen dat ik het geweldig getroffen heb met hem als begeleider en mentor. Ik wil dan ook uit de grond van mijn hart zeggen: dank u wel professor. Dank u wel voor zoveel vertrouwen. Dank u wel voor zoveel vrijheid. Dank u wel ook voor zoveel bruikbare suggesties. Dank u wel om mij al eens met een kwinkslag het recht te verlenen om van gedachten te veranderen. Dank u wel om mij te laten doen wat ik graag doe, en om mij onder zachte dwang te leren genieten van wat mij eerst afschrikte. Dank u wel voor al die uren die u opgeofferd hebt aan het nauwgezet nalezen van dit proefschrift. Dank u wel voor alles wat u mij leerde, zowel expliciet als tussen de regels. Dank u wel ook voor uw hoge verwachtingen. Ik hoop dat ik ze een beetje heb kunnen waarmaken, en vooral dat de rit nog niet ten einde is. Tijdens Eusflat'2001 zei een conferentieganger: "You gave a nice talk. Very much in the spirit of Etienne." Het klonk mij als muziek in de oren, want dit is precies de weg die ik wil bewandelen.

Daarnaast wil ik de leden van de vakgroep Toegepaste Wiskunde en Informatica die ik de afgelopen vier jaar beter leren kennen heb, bedanken voor de fijne sfeer die ze creëren, de inspirerende conversaties en de steun. In het bijzonder wil ik ook een dankwoordje neerschrijven voor de logistieke ondersteuners van de vakgroep: Katia voor haar immer snelle replies, Herbert voor het genezen van mijn PC na een virusaanval, Paul voor alle moeite en zorg besteed aan allerlei formulieren, An voor het in- en uitschrijven van de bibliotheekboeken, en zeker ook Wouter o.m. voor zijn toewijding en hulp bij het ontwerpen van mijn poster voor het doctoraatssymposium van de Faculteit Wetenschappen.

Het mag gezegd: ik heb de beste herinneringen aan de samenwerking binnen de onderzoeksgroep Vaagheids- en Onzekerheidsmodellen. Ik wil met name Frederik danken voor zijn geruststellende relativiseringszin, en Hugo, rots in de branding, altijd paraat om mij in alle rust te helpen wanneer ik panikeerde. Chrisje, voor de manier waarop hij mij verplicht om diep op de materie in te gaan door met minder geen genoeg te nemen, en voor de stilte van het

vertrouwen tussen ons dat hij bij tijden verbreekt om eens vlakaf zijn gedacht te zeggen. Ik wil Dietrich danken voor alle keren dat hij mijn reddende engel was, en natuurlijk ook Mike, mijn “broer in de wetenschap” (lees “partner in crime”), wat genoeg zegt.

Ook buiten de grenzen van de vakgroep wil ik een aantal mensen danken voor de fijne samenwerking en de kansen die ze mij geboden hebben: eerst en vooral Christof Vanden Eynde van de vakgroep Nederlandse Taalkunde, voor al zijn hulp bij het taalkundig aspect van dit proefschrift, en in het bijzonder ook om mij de toelating te verlenen zijn lessenreeks over semantiek en pragmatiek bij te wonen. Daarnaast ook professor Dick Botteldooren en Andy Verkeyn van de vakgroep Informatietechnologie voor de herhaaldelijke kruisbestuiving, evenals Ania en Ulrich, voor de tijd die ze namen om met mij te praten over mijn onderzoek en voor de tips die ze me gaven omtrent het schrijven van wetenschappelijke artikels, en natuurlijk ook Nico, voor zijn nimmer aflatend enthousiasme voor de vaagverzamelingenleer en voor de fijne samenwerking, zowel tijdens ons verblijf in Delft als via e-mail.

De volgende mensen wens ik in het bijzonder hartelijk te danken voor hun gastvrijheid: professor Robert Babuška en de collega’s van de afdeling Regeltechniek van de T.U. Delft, Nederland; professor Erich Klement, Ulrich, Susanne en alle andere gastvrije medewerkers van het Fuzzy Logic Laboratory Linz, Oostenrijk; professor Guoqing Chen en zijn studenten van de Tsinghua University, Peking, China. Ik wil ook Nikos danken voor de hartelijke ontvangst in Amsterdam en tot slot maar zeker niet in het minst Zdenek, die mij op zonnige namiddag in de koninklijke tuinen in Praag de noodzaak van de representatie van onvergelykbare informatie deed inzien. Ook wil ik een woordje van dank richten tot Alberik, Bart, Christophe, Dietrich en Dries voor hun hulp om dit proefschrift te verluchten met illustraties.

Buiten het directe academische kader mocht ik ook heel wat steun genieten: ik wil Wouter Mijs danken voor het delen van zoveel levens- en andere wijsheden, en Bart voor zijn interesse en zijn kritisch-uitdagende houding. Alberik wil ik danken omdat hij zo goed aanvoelt wat ik nodig heb, en vooral, omdat hij zo onvoorwaardelijk alles in het werk stelt om me dat te geven; zijn ouders voor de verwenweekendjes en alle goede raad. Uiteraard wil ik ook mijn ouders danken zonder wiens steun en hulp de voorbije vier jaar ongetwijfeld een stuk minder onbekommerd zouden verlopen zijn. Tenslotte wil ik graag het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek Vlaanderen (FWO) bedanken voor het in mij gestelde vertrouwen en de daarmee gepaard gaande financiële steun.

Hoofdstuk 1

Inleiding

The sixth member of the Discovery crew
is the latest result in machine intelligence
– the HAL 9000 computer, which can reproduce,
though some experts still prefer to use the word
‘mimic’, most of the activities of the human brain,
and with incalculably greater speed and reliability.
(BBC announcer, in: 2001 A Space Odyssey, 1968)

Het oorspronkelijke doel van computerbouwers en onderzoekers in kunstmatige intelligentie was het ontwerpen van “denkende machines”. Het definiëren van “intelligentie” en “denken” is niet voor de hand liggend. Alan Turing stelde hiervoor een wereldberoemde test voor: verberg een mens en een machine achter een gordijn; indien een waarnemer uit de antwoorden van de twee “systemen” niet kan opmaken wie de mens is, dan kunnen beide systemen als denkend beschouwd worden. Vandaag is men zich er van bewust dat een dergelijke vorm van artificiële intelligentie belangrijke verschillen vertoont met menselijke intelligentie, zoals een bewustzijn [89]. Uit lopend onderzoek met bruikbare resultaten die toepasbaar zijn in allerlei aspecten van de samenleving, blijkt echter dat het even goed de moeite loont verder te bouwen aan de Universele Turing Machine (UTM). Het sleutelidee hierbij is het simuleren van het gedrag van een denkend brein.

Sinds hun ontstaan zijn computers een steeds grotere rol in ons dagelijks leven gaan opeisen: dankzij krachtige number crunchers kan het weer vlotter voorspeld worden; de boekhouding van talloze winkels en bedrijven is reeds grotendeels geautomatiseerd; allerlei lessen en cursussen kunnen gevolgd worden achter het scherm — meer en meer interactief; steeds meer mensen raken vertrouwd met internet; psychologen leren omgaan met statistische pakketten voor de verwerking van onderzoeksgegevens; tot in de kleinste dorpen worden bibliotheken uitgerust met een PC enz. Toch zijn computers zeker nog niet in staat om alle taken die door mensen kunnen uitgevoerd worden, na te bootsen of over te nemen.

Door de bijna overweldigende vooruitgang op informaticagebied begon men zich op een gegeven moment terecht vragen te stellen zoals (zie o.m. [102]): in hoever zullen computers de door hen berekende gegevens ooit kunnen interpreteren zoals b.v. een weerman of een socioloog? Zal een machine ooit dezelfde of soortgelijke voorspellingen maken als een beurspecialist? Kan het aan een computer overgelaten worden om een medische diagnose te stellen? Om een uitspraak te doen in een rechtzaak? Kunnen machines leerkrachten vervangen? Kan een computer winnen van een topschaker?

De capaciteit van computers in termen van rekenkracht en geheugen is de laatste jaren op korte tijd in hoge mate toegenomen, wat o.m. de hierboven vermelde “dromen” of “doelen” een stukje dichterbij heeft gebracht. Men kan zich evenwel niet (blijven) beroepen op rekenkracht en geheugen alleen. Zoals de zogenaamde limiet van Bremermann [12] aangeeft, kan een systeem dat rekent tegen lichtsnelheid per seconde niet meer dan 2×10^{47} bits per gram van zijn massa verwerken (waarbij er van uitgegaan wordt dat atomen worden gebruikt als locaties voor de informatiebits). Wanneer een computer met de omvang van de aarde sinds het ontstaan van de aarde steeds zou doorgerekend hebben aan de grootst denkbare snelheid, dan zou hij nu ongeveer al 10^{93} bits verwerkt hebben. Dit reusachtige getal stelt in feite nog niet zo veel voor wanneer men weet dat een schaakspel op zo’n 10^{120} verschillende manieren kan gespeeld worden.

Hoewel een grotere capaciteit ongetwijfeld een belangrijk voordeel is, kunnen we er, zoals de limiet van Bremermann aangeeft, niet louter op terugvallen om zeer complexe taken te laten uitvoeren. Om het volle voordeel uit de rekenkracht te halen, moet deze verstandig aangewend worden. Dit kan op allerlei manieren die elkaar kunnen aanvullen. Zo kan het efficiënter maken van een implementatie door een aantal instructies op een geschiktere plaats te zetten (b.v. uit een lus) al heel wat rekentijd sparen, en zo kiest men om zuiniger om te springen met de rekentijd uiteraard voor een slim algoritme i.p.v. een zogenaamd brute krachtalgoritme.

Het is precies op dit vlak dat de discipline artificiële intelligentie zich ontpopt, de tak van informatica die intelligent gedrag wil verlenen aan computers. Daartoe worden allerlei middelen aangewend, vaak geïnspireerd door een of ander aspect van de menselijke natuur die men wil nabootsen. Het menselijk brein imiteren is echter zeer moeilijk, en wel in de eerste plaats omdat men nog niet volledig doorgrond heeft hoe alles functioneert. Een bekende deeltak van de artificiële intelligentie probeert het redeneren van mensen na te bootsen door ervan uit te gaan dat ze daarvoor regeltjes gebruiken (expertsystemen), een andere tak probeert het nog veel dichterbij het fysieke niveau door de hersencellen te imiteren (neurale netwerken), en zelfs het naspelen van de Darwianse evolutie is een beproefde en niet zelden succesvolle techniek (genetische algoritmen). Al deze methodologieën brengen a.h.w. hun eigen steentje bij. Ze zijn complementair i.p.v. concurrentieel, en er is bovendien nog veel ruimte voor verbetering.

De methodologie waarbinnen dit proefschrift kadert, wil nog een ander aspect van het menselijk gedrag imiteren. Het gaat hier om een fantastisch hulpmiddel dat we vanaf kleinsaf ontwikkelen, dat ons in staat stelt om onszelf en de wereld

rondom ons te vatten, dat ons toelaat om de ingewikkeldste redeneringen te maken zonder dat het ons ook maar enige inspanning lijkt te kosten: de natuurlijke taal.

Digitale computers zijn gebouwd op de fundamenteën van de binaire logica; de waarheidswaarde VALS of 0 uit de binaire logica correspondeert daarbij met een open schakeling (geen stroom mogelijk), terwijl de waarheidswaarde WAAR of 1 overeenkomt met een gesloten schakeling. Diezelfde binaire logica, die reeds in omloop is sinds Aristoteles, is ook de grondslag van de wiskunde. De taal van de wiskunde laat zich dan ook vrij gemakkelijk en getrouw weergeven bovenop het hardwareniveau van digitale computers.

Heel anders is het gesteld met de natuurlijke taal: enerzijds duikt hier opnieuw het probleem op dat de studie over de semantiek van natuurlijke talen nog volop aan de gang is (een probleem dat zich bij de wiskunde nauwelijks voordoet omdat de betekenis van de concepten daar bij definitie vastgelegd wordt), en anderzijds wordt men bij een rechttoe rechtaan implementatie geconfronteerd met een grote discrepantie tussen binaire logica en natuurlijke taal. In de binaire logica is een uitdrukking zoals “Mike is groot” ofwel waar ofwel vals, terwijl er volgens onze intuïtie eerder een graduele overgang van groot naar niet groot is, waardoor we onze natuur mogelijk geweld moeten aandoen om te kiezen tussen waar en vals voor een dergelijke uitspraak. Van sommige mannen kunnen we zonder twijfel zeggen dat ze groot zijn, van anderen dat ze niet groot zijn, maar er is een tussenliggende groep van wie we eigenlijk noch het een noch het ander kunnen zeggen. Die twijfel heeft niets te maken met een gebrek aan informatie, want de twijfel is er (of juist niet), onverschillig of we de exacte lengte tot op de centimeter van de persoon in kwestie kennen. Het “probleem” ligt niet bij de lengte van Mike, noch bij onze kennis ervan, maar schuilt in het woord “groot”.

Een concept als groot wordt vaak genoemd omdat er geen abrupte maar een graduele overgang is van groot naar niet groot. Reeds in de klassieke oudheid was men zich bewust van het bestaan van dergelijke vage concepten. Dit uitte zich o.m. in het nadenken over de soritesparadox (de paradox van de hoop): uit de veronderstellingen dat 10^6 korreltjes zand bij elkaar een hoop zand vormen, en dat een hoop zand waarvan men één korreltje wegneemt nog steeds een hoop is, zou men door het herhaaldelijk wegnemen van korreltjes uiteindelijk kunnen besluiten dat twee korreltjes zand bij elkaar nog steeds een hoop zand is, wat uiteraard ingaat tegen de intuïtie. Hoop is een vaag concept: het is niet bij het wegnemen van één specifiek zandkorreltje dat de hoop niet langer een hoop is, maar er is een geleidelijke overgang.

Dergelijke vage concepten dragen in grote mate bij tot de efficiëntie van de menselijke communicatie. Hun vaagheid belet daarbij niet dat ze een duidelijke betekenis hebben die door iedereen kan worden begrepen, waardoor een compacte, eenvoudige en vaak toch toereikende informatie-overdracht over ingewikkelde aangelegenheden mogelijk wordt. De gegevens van veel dagelijkse problemen en redeneringen zijn immers lang niet zo scherp; de oplossing of de conclusie moet dikwijls evenmin scherp zijn: meestal zijn een zekere graad van vaagheid in de formulering van een probleem en zijn oplossing aanvaardbaar. Hierin schuilt de kracht die het imiteren van het gebruik van natuurlijke taal

aan informatiesystemen kan verlenen: het werken met informatie, voorgesteld op een manier die enerzijds beperkt genoeg is om haalbaar te zijn in termen van rekentijd en geheugen, maar anderzijds nog voldoende betekenisdragend is.

Ondanks de grote discrepantie tussen beide, is het tot op de dag van vandaag zeer gebruikelijk om vage linguïstische uitdrukkingen in het keurslijf van de binaire logica en de ermee zeer nauw verwante verzamelingenleer van Cantor te proberen dwingen. Zo gebruikt men in de computationele semantiek, de tak van computerlinguïstiek die zich bezighoudt met het representeren en manipuleren van de betekenis van linguïstische objecten, meestal binaire eerste-orde logica. Een uitspraak zoals “de auto is goedkoop” wordt dan hierbij gerepresenteerd door een formule zoals *goedkoop(auto)* die, voor een bepaalde valuatie, ofwel waar ofwel vals als waarheidswaarde heeft. In het echte leven is het echter niet voor de hand liggend om de klasse van auto’s te verdelen in degene die duur zijn en degene die dat niet zijn. De klassieke wiskundige oplossing voor dit probleem is om een prijs te kiezen, b.v. €15000, en om elke auto die niet meer kost goedkoop te noemen en al de andere niet. Het is echter niet intuïtief aanvaardbaar te verantwoorden waarom men een auto van €15000 goedkoop zou noemen en een auto van €15000.01 niet meer. Ook “goedkoop” is een vaag begrip, gekenmerkt door een geleidelijke overgang van goedkoop zijn, naar niet goedkoop zijn.

Het toepassen van linguïstische wijzigers zoals *zeer*, *tamelijk*, *een beetje*,... op dergelijke vage uitdrukkingen werpt licht op hun geleidelijkheid [69]. Deze kleine woordjes spelen een belangrijke rol in menselijke communicatie [67]. In een poging om logica dichter bij spreektaal te brengen, slaagde Kubinski er in 1960 in om wat van de vaagheid die aanwezig is in natuurlijke taal in een tweewaardig deductiesysteem binnen te smokkelen door de linguïstische wijziger rather op axiomatische wijze te introduceren [67]. Omdat binaire logica slechts twee waarheidswaarden kent, kan het de vaagheid van linguïstische termen echter nooit ten volle modelleren. Meerdere waarheidswaarden zijn nodig om de geleidelijke overgang voor te stellen.

Enkele jaren na de mooie kunstgreep van Kubinski introduceerde Zadeh een leer die terugging op de krijtlijnen van meerwaardige logica die o.m. reeds door Łukasiewicz waren uitgetekend. In deze vaagverzamelingenleer (fuzzy set theory) [101] wordt een linguïstische term voorgesteld door een vaagverzameling. In de traditionele verzamelingenleer van Cantor behoort een element x uit een universum X tot een verzameling P of niet; x behoort a.h.w. in de mate 1 tot P of in de mate 0 tot P . Een vaagverzameling daarentegen wordt gekarakteriseerd door een $X - [0, 1]$ afbeelding A zo dat $A(x)$ de mate is waarin x behoort tot de vaagverzameling. Een element kan dus behoren tot een vaagverzameling in een mate tussen 0 en 1 (0 en 1 inbegrepen). A wordt zeer toepasselijk de lidmaatschapsfunctie genoemd. De verzameling P kan gezien worden als een vaagverzameling waarvan de lidmaatschapsfunctie enkel de waarden 0 en 1 kan aannemen. Dergelijke verzamelingen zullen we vanaf nu zoals gebruikelijk “scherp” noemen. Aangezien elke scherpe verzameling ook een vaagverzameling is, kan de vaagverzamelingenleer beschouwd worden als een uitbreiding van de verzamelingenleer van Cantor. Anderzijds is de vaagverzamelingenleer volle-

dig opgebouwd met ingrediënten uit de verzamelingenleer (waarbij het concept functie een cruciale rol speelt); in dat opzicht is de vaagverzamelingenleer dus een soort van toepassing van Cantors verzamelingenleer.

De vaagverzamelingenleer kan fungeren als een taal tussen enerzijds (een deelverzameling van de) natuurlijke taal en anderzijds het hardwareniveau van computersystemen. De vaagverzamelingenleer is een wiskundige theorie en laat zich dus, zoals reeds aangehaald, vrij vlot implementeren in digitale hardware. Onze aandacht zal in dit proefschrift dan ook onverdeeld uitgaan naar het andere niveau: de modellering van uitdrukkingen uit de natuurlijke taal in de vaagverzamelingenleer. We streven daarbij naar een gemakkelijke, en vooral een zo betekenisgetrouwe representatie, teneinde het menselijk brein zo goed mogelijk na te apen. De onderliggende ambitie is daarbij echter niet het nabootsen op zich, maar wel het ontwerpen van bruikbare imitaties die kunnen aangewend worden om de afhandeling van allerlei problemen (gedeeltelijk) over te laten aan machines. We zijn ons ervan bewust dat we niet steeds de hele betekenis kunnen vatten. De modellen die we zullen voorstellen moeten dan ook echt gezien worden als imitaties. Uit het dagelijkse leven weten we echter dat ook “slechte” imitaties bruikbaar kunnen zijn: denken we maar aan vliegtuigen die een allesbehalve getrouwe imitatie van vogels zijn, maar toch vliegen.

We leggen ons in dit proefschrift bovendien ook toe op een beperkt deel van de natuurlijke taal, nl. de waarden van linguïstische veranderlijken in de zin van Zadeh [106]. In tegenstelling tot numerieke veranderlijken die numerieke waarden aannemen, heeft een linguïstische veranderlijke als waarden linguïstische termen, die de vaagheid aanwezig in menselijke percepties van de wereld kunnen vatten. Deze waarden vertonen een structuur die het mogelijk maakt de representatie van samengestelde termen te bepalen uitgaande van die van hun samenstellende delen.

Met een atomaire linguïstische term bedoelt men gewoonlijk een adjectief (b.v. *mooi*). Samengestelde termen worden gegenereerd door het toepassen van een linguïstische wijziger op een term (b.v. *zeer mooi*) of door het combineren van twee termen d.m.v. een voegwoord (b.v. *zeer mooi en dom*). De klasse van linguïstische termen die men op deze manier kan construeren komt uiteraard niet overeen met een volledige natuurlijke taal, maar overspant toch een opmerkelijk expressief deel ervan. Dergelijke termen en hun vaagverzamelingtheoretische representatie worden vandaag de dag reeds gebruikt in een uiteenlopend gamma van toepassingen. We vermelden er hier een aantal ter illustratie: dataontginningsystemen die associatieregels zoals “kaviaar $\Rightarrow$ zeer dure champagne” puren uit winkelgegevens (zie b.v. [97]), het maken van linguïstische samenvattingen van databanken zoals “de meeste werknemers hebben een redelijk hoog salaris” (zie b.v. [54]), querysystemen die linguïstische bevestigingen van databanken mogelijk maken zoals “SELECT FROM tijdschriften WHERE populariteit IS buitengewoon hoog” (zie b.v. [66], [100]), vaagregelsystemen waarin de expertkennis geformuleerd is in linguïstische regels zoals “ALS blok grootte klein is DAN is bitconsumptie zeer laag” (zie b.v. [1]).

De constructie van geschikte vaagverzamelingen voor de linguïstische termen die betrokken zijn bij een toepassing is meestal een van de moeilijkste

opgaven bij het ontwerpen ervan. Een goede representatie van de wijzigers en de voegwoorden is dus wenselijk, aangezien die toelaat om uitgaande van bestaande vaagverzamelingen voor de atomaire termen automatisch vaagverzamelingen voor de samengestelde termen te construeren. In dit proefschrift zullen we ons daarom toeleggen op de representatie van linguïstische wijzigers.

In het merendeel van de literatuur en de toepassingen worden linguïstische termen gemodelleerd door vaagververzamelingen die lidmaatschapsgraden aannemen in het reële eenheidsinterval $[0, 1]$. De constructie van een vaagverzameling voor een term kent daarbij een grote vrijheidsgraad: men kan kiezen uit een breed gamma van algemene vormfuncties en daarbinnen nog eens voor een aantal parameters die in zekere mate kunnen veranderd worden, allemaal met weinig of geen effect op de functionaliteit van de systemen die dit model van linguïstische termen gebruiken. De exacte numerieke waarden van de lidmaatschapsgraden zijn gewoonlijk niet te verantwoorden noch belangrijk; enkel aan waarden zoals 0, 0.5 en 1 wordt een bijzonder intuïtieve betekenis gehecht. Het enige echt belangrijke is dat de lidmaatschapsgraden een graduele ordening van “behoren tot” op de elementen induceren, wat precies de kracht van vaagverzamelingenleer uitmaakt.

Het afbeelden van elementen uit het universum op $[0, 1]$ legt inderdaad een scherpe, lineaire ordening op aan deze elementen. Er bestaat echter ook onvergelykbare informatie in de echte wereld, waaronder linguïstische termen die niet overeenkomen met een lineaire ordening op het universum. Vraag dit maar aan de dame die op zoek is naar een leuke winterjas en twee modellen op het oog heeft waartussen ze niet kan kiezen; geen van beide heeft m.a.w. een grotere lidmaatschapsgraad dan de andere in de vaagverzameling *leuk*. Dat men ook niet zonder meer aan beide jassen dezelfde lidmaatschapsgraad kan toekennen wordt duidelijk wanneer de dame vervolgens ontdekt dat er van de eerste jas een uitvoering bestaat met afneembare kap. Deze derde jas heeft wel een hogere lidmaatschapsgraad in *leuk* dan de eerste jas, maar is daarom niet noodzakelijk leuker dan de tweede jas. $[0, 1]$ -waardige vaagverzamelingenleer is ontoereikend om om te gaan met dergelijke onvergelykbare informatie. De sleutel tot de oplossing was echter reeds aanwezig van bij het prille begin van vaagverzamelingenleer.

In 1965 schreef Zadeh [101]: “In a more general setting, the range of the membership function can be taken to be a suitable partially ordered set P .” Het eenheidsinterval werd altijd en wordt nog steeds beschouwd als een zeer natuurlijke en doorzichtige verzameling van lidmaatschapsgraden [81] die gebruikt wordt in de meerderheid van toepassingen. Van bij het begin werd er echter ook wat aandacht besteed aan andere geordende verzamelingen. In 1967 introduceerde Goguen [47] formeel de notie L -vaagverzameling (L -fuzzy set) met een lidmaatschapsfunctie die waarden aanneemt in een tralie L . Het concept L -vaagverzameling wordt nog steeds bestudeerd, zij het vooral op theoretisch niveau, met slechts een beperkte interesse voor de praktijk, meestal beperkt tot type-2 vaagverzamelingen (waarbij de lidmaatschapsgraden op hun beurt vaagverzamelingen in $[0, 1]$ zijn). Aangezien veel informatie in de echte wereld onvergelykbaar is, geloven we dat er nog steeds een grote leemte in de markt van

toepassingen is, die kan ingevuld worden door systemen die in staat zijn deze soort van informatie te representeren. We zullen dan ook bijzondere aandacht besteden aan representaties van linguïstische wijzigers die kunnen ingrijpen op L -verzamelingen waarbij L niet noodzakelijk $[0, 1]$ is.

De opbouw van dit proefschrift kan grofweg als volgt geschetst worden: de twee volgende hoofdstukken hebben een voorbereidend karakter. In Hoofdstuk 2 verzamelen we de nodige wiskundige bouwblokken uit de ordetheorie en de L -vaagverzamelingenleer. In Hoofdstuk 3 besteden we de nodige aandacht aan de linguïstische aspecten van dit werk, we gaan dieper in op de representatie van atomaire termen en we formuleren onze eisen en verwachtingen naar de representatie van linguïstische wijzigers toe. In Hoofdstuk 4 bekijken we in detail wat er daarvoor reeds op de markt te vinden is. Vanuit de vastgestelde tekortkomingen gaan we vanaf dan in de volgende hoofdstukken onze eigen weg in een zoektocht naar verbetering...

We merken nog op dat een aantal van de onderzoeksresultaten beschreven in dit werk reeds werden gepresenteerd op internationale conferenties ([25], [26], [27], [28], [30], [34], [37], [73]) en tijdens studentensessies van zomerscholen ([22], [23]). Tevens verschenen delen van dit werk reeds als onderdelen van boeken en in tijdschriften ([29], [35], [36], [59]) of zullen als dusdanig verschijnen ([8], [24], [31], [32], [33], [96]).

Hoofdstuk 2

Basisbegrippen

Zelfs een weg
van 1000 oorden
begint met 1 stap.
(Chinees spreekwoord)

In dit hoofdstuk brengen wij de wiskundige bouwblokken samen die nodig zijn om dit proefschrift op te bouwen. Het gaat hier enerzijds om ordetheoretische concepten en anderzijds om fundamentele noties uit de L -vaagverzamelingenleer. Lezers die goed vertrouwd zijn met de vaagverzamelingenleer kunnen dit hoofdstuk waarschijnlijk overslaan. De anderen raden wij aan om het in eerste instantie “in vogelvucht” door te nemen en om, wanneer vanuit de volgende hoofdstukken de nood zich aandient, een bepaalde definitie of hulpstelling in meer detail te bekijken.

2.1 Enkele ordetheoretische concepten

2.1. Definitie (Partieel geordende verzameling). [5] Een binaire relatie $\leq$ in een verzameling P is een orderrelatie als en slechts als voor alle x, y en z in P :

- | | |
|---|------------------|
| (O.1) $x \leq x$ | (reflexiviteit) |
| (O.2) Uit $x \leq y$ en $y \leq x$ volgt $x = y$ | (antisymmetrie) |
| (O.3) Uit $x \leq y$ en $y \leq z$ volgt $x \leq z$ | (transitiviteit) |

Een verzameling P voorzien van een orderrelatie $\leq$ wordt een partieel geordende verzameling (kortweg poset, van het Engelse *partially ordered set*) genoemd, voluit genoteerd als $(P, \leq)$. De notatie $x \geq y$ staat voor $y \leq x$. Daarnaast wordt $x \leq y \wedge x \neq y$ afgekort als $x < y$, of nog: $y > x$.

Een partieel geordende verzameling $(P, \leq)$ wordt eindig genoemd indien P een eindig aantal elementen bevat. Indien het aantal elementen niet te groot is, dan kan $(P, \leq)$ meestal grafisch voorgesteld worden d.m.v. een overzichtelijk Hasse-diagram. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het begrip “bedekkingsrelatie”.

2.2. Definitie (Bedekkingsrelatie). [5] Zij $(P, \leq)$ een partieel geordende verzameling en x en y elementen van P . Men zegt dat het element y het element x bedekt (of dat x bedekt wordt door y), genoteerd als $x \ll y$ a.s.a.

$$x < y \wedge \neg(\exists z \in P)(x < z < y)$$

Een Hasse-diagram voor een eindige partieel geordende verzameling $(P, \leq)$ wordt bekomen door voor ieder element van P een bolletje te tekenen zo dat, wanneer $x > y$, het bolletje voor x hoger staat dan dat voor y . Wanneer $y \ll x$ dan wordt y bovendien door een lijn verbonden met x . Voor een voorbeeld verwijzen we naar Figuur 2.1.

2.3. Definitie (Onvergelijkbare elementen). [5] Zij $(P, \leq)$ een partieel geordende verzameling en x en y elementen van P . Indien $x \not\leq y$ en $y \not\leq x$ dan zegt men dat x en y onvergelijkbaar zijn. Men noteert dit als $x \parallel y$.

2.4. Definitie (Ketting). [5] Een partieel geordende verzameling $(P, \leq)$ wordt een ketting genoemd indien voor alle x en y in P geldt dat $x \leq y$ of $y \leq x$. Men zegt dan dat de ordening totaal is.

2.5. Definitie (Kleinste en grootste element). [5] Zij $(P, \leq)$ een partieel geordende verzameling en x een element van P . Men zegt dat

$$\begin{aligned} x \text{ het kleinste element van } P \text{ is a.s.a. } & (\forall y \in P)(x \leq y) \\ x \text{ het grootste element van } P \text{ is a.s.a. } & (\forall y \in P)(y \leq x) \end{aligned}$$

I.p.v. kleinste element van P spreekt men ook over minimum van P , terwijl het grootste element van P ook het maximum van P genoemd wordt. Een partieel geordende verzameling $(P, \leq)$ wordt begrensd genoemd indien ze een minimum en een maximum bezit. Deze elementen worden genoteerd als 0 en 1 respectievelijk. Een deelverzameling van een partieel geordende verzameling P is eveneens een partieel geordende verzameling. Men kan dan ook spreken van het minimum en het maximum van een deelverzameling van P (indien deze elementen bestaan uiteraard).

2.6. Definitie (Ondergrenzen en bovengrenzen). [5] Zij $(P, \leq)$ een partieel geordende verzameling, A een deelverzameling van P en x een element van P . Men zegt dat

$$\begin{aligned} x \text{ een ondergrens voor } A \text{ is a.s.a. } & (\forall y \in A)(x \leq y) \\ x \text{ een bovengrens voor } A \text{ is a.s.a. } & (\forall y \in A)(y \leq x) \end{aligned}$$

2.7. Definitie (Infimum en supremum). [5] Zij $(P, \leq)$ een partieel geordende verzameling en A een deelverzameling van P . Als de verzameling van ondergrenzen voor A een maximum bezit, dan wordt dit het infimum van A genoemd en genoteerd als $\inf A$. Als de verzameling van bovengrenzen voor A een minimum bezit, dan wordt dit het supremum van A genoemd en genoteerd als $\sup A$.

2.8. Definitie (Tralie). [5] Een partieel geordende verzameling $(P, \leq)$ wordt een tralie genoemd als elk paar $\{x, y\}$ van P een infimum en een supremum heeft.

In een tralie worden $\inf\{x, y\}$ en $\sup\{x, y\}$ ook genoteerd als $x \wedge y$ en $x \vee y$ respectievelijk. Men noemt $\wedge$ de meetbewerking en $\vee$ de joinbewerking.

2.9. Eigenschap. [5] In een tralie $(L, \leq)$ voldoen de meet- en joinbewerking aan:

$$\begin{array}{ll} \text{(L.1)} & x \wedge x = x & \text{(L.1')} & x \vee x = x \\ \text{(L.2)} & x \wedge y = y \wedge x & \text{(L.2')} & x \vee y = y \vee x \\ \text{(L.3)} & x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z & \text{(L.3')} & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ \text{(L.4)} & x \wedge (x \vee y) = x & \text{(L.4')} & x \vee (x \wedge y) = x \end{array}$$

voor alle x, y en z in L .

Bovendien is een verzameling voorzien van twee bewerkingen $\wedge$ en $\vee$ die aan de voorgaande eigenschap voldoen, een tralie waarbij de ordening gedefinieerd is door $x \leq y$ a.s.a. $x \vee y = y$ (of equivalent: $x \leq y$ a.s.a. $x \wedge y = x$), voor alle x en y in L [5]. Deze algebraïsch geïnspireerde interpretatie van tralies laat toe ook de notatie $(L, \wedge, \vee)$ te gebruiken i.p.v. $(L, \leq)$. Men leidt hier ook meteen uit af dat elke ketting een tralie is.

2.10. Definitie (Complete Tralie). [5] Een partieel geordende verzameling $(P, \leq)$ wordt een complete tralie genoemd als iedere deelverzameling van P een supremum en een infimum heeft.

Elke eindige tralie is een complete tralie. Een complete tralie is steeds begrensd.

2.11. Definitie (Distributieve tralie). [5] Een tralie $(L, \leq)$ wordt distributief genoemd indien voor alle x, y en z in L geldt dat $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

2.12. Definitie (Gecomplementeerde tralie). [5] Zij $(L, \leq)$ een begrensd tralie, dan wordt $(L, \leq)$ gecomplementeerd genoemd indien er voor elk element x van L een element y van L bestaat zo dat $x \wedge y = 0$ en $x \vee y = 1$. y wordt dan een complement van x genoemd.

2.13. Definitie (Stijgend en dalend). Zij $(P_1, \leq_1)$ en $(P_2, \leq_2)$ partieel geordende verzamelingen en f een $P_1 - P_2$ afbeelding, dan zegt men dat

$$\begin{array}{l} f \text{ stijgend is a.s.a. } (\forall (x, y) \in P_1^2)(x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y)) \\ f \text{ dalend is a.s.a. } (\forall (x, y) \in P_1^2)(x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \geq_2 f(y)) \end{array}$$

2.14. Definitie (Familie). Zij X en Y universa. Met een familie $(x_i)_{i \in X}$ in Y bedoelen we dan de $X - Y$ afbeelding

$$\begin{array}{ll} (x_i)_{i \in X} : & X \rightarrow Y \\ & i \mapsto x_i, \text{ voor alle } i \text{ in } X \end{array}$$

2.15. Hulpstelling (Minimax principe). [5] Zij L een complete tralie en $(z_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ een familie in L dan

$$\sup_{i \in I} \inf_{j \in J} z_{i,j} \leq \inf_{j \in J} \sup_{i \in I} z_{i,j}$$

2.16. Definitie (Taliemorfismen). [5], [18] Zij L een complete tralie en f een $L - L$ afbeelding. Indien voor alle x en y in L geldt dat

- (1) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, dan wordt f een meetmorfisme genoemd
- (2) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, dan wordt f een joinmorfisme genoemd
- (3) $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$, dan wordt f een duaal meetmorfisme genoemd
- (4) $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$, dan wordt f een duaal joinmorfisme genoemd

Indien voor elke familie $(x_i)_{i \in I}$ in L geldt dat

- (5) $f(\sup_{i \in I} x_i) = \sup_{i \in I} f(x_i)$, dan wordt f een supmorfisme genoemd
- (6) $f(\inf_{i \in I} x_i) = \inf_{i \in I} f(x_i)$, dan wordt f een infmorfisme genoemd
- (7) $f(\sup_{i \in I} x_i) = \inf_{i \in I} f(x_i)$, dan wordt f een duaal supmorfisme genoemd
- (8) $f(\inf_{i \in I} x_i) = \sup_{i \in I} f(x_i)$, dan wordt f een duaal infmorfisme genoemd

2.17. Hulpstelling. Zij L een complete tralie. Voor elke $L - L$ afbeelding f en voor elke familie $(x_i)_{i \in I}$ in L geldt

- (1) Indien f stijgend is dan is
 - (a) $\sup_{i \in I} f(x_i) \leq f(\sup_{i \in I} x_i)$
 - (b) $\inf_{i \in I} f(x_i) \geq f(\inf_{i \in I} x_i)$
- (2) Indien f dalend is dan is
 - (a) $\sup_{i \in I} f(x_i) \leq f(\inf_{i \in I} x_i)$
 - (b) $\inf_{i \in I} f(x_i) \geq f(\sup_{i \in I} x_i)$

Bewijs. Deze 4 uitspraken kunnen alle op dezelfde manier aangetoond worden. Als voorbeeld bewijzen we (2a). Voor alle j in I geldt

$$x_j \geq \inf_{i \in I} x_i$$

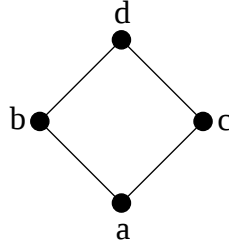
en dus, wegens f dalend,

$$f(x_j) \leq f(\inf_{i \in I} x_i)$$

Het rechterlid van bovenstaande ongelijkheid is m.a.w. een bovengrens voor $\{f(x_j) | j \in I\}$. Wegens de definitie van supremum als kleinste bovengrens volgt nu het gestelde. $\square$

Voor eindige families in kettingen kan bovenstaande hulpstelling nog aangescherpt worden.

2.18. Hulpstelling. [18] Zij L een ketting. Voor elke $L - L$ afbeelding f en voor alle x en y in L geldt

Figuur 2.1: Hasse-diagram van de tralie L_1

- (1) Indien f stijgend is, dan is f een meetmorfisme en een joinmorfisme.
- (2) Indien f dalend is, dan is f een duaal meetmorfisme en een duaal joinmorfisme.

Voor het bewijs verwijzen we naar [18]. Dat bewijs is een gevallenonderzoek dat uitgaat van totale ordening in L . Voorgaande hulpstelling geldt niet algemeen in een tralie die geen ketting is. Stel b.v. $L_1 = \{a, b, c, d\}$ zo dat $a \leq b$, $a \leq c$, $b \leq d$ en $c \leq d$ (zie Figuur 2.1) en zij de $L - L$ afbeelding f gedefinieerd als $f(a) = c$, $f(b) = d$, $f(c) = d$ en $f(d) = d$. Men gaat gemakkelijk na dat f stijgend is en dat bovendien geldt $f(b \wedge c) = c$ en $f(b) \wedge f(c) = d = f(b) \vee f(c)$.

2.2 Logische operatoren op begrensde tralies

Voor de interpretatie van proposities doet men in de tweewaardige propositiologica een beroep op de gecomplementeerde distributieve tralie $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$ waarbij $\wedge$ en $\vee$ gedefinieerd zijn d.m.v. hun waarheidstabellen

$\wedge$	0	1	$\vee$	0	1
0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1

Elk element x van deze zogenaamde Booletralie heeft een uniek complement, aangeduid door $\neg x$. De proposities $x \wedge \neg x = 0$ en $x \vee \neg x = 1$ worden respectievelijk “de wet van de contradictie” en de “wet van het uitgesloten derde” genoemd. Verder definieert men $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$, voor alle x en y in $\{0, 1\}$.

	$\neg$	$\Rightarrow$	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1

Deze begrensde tralie bevat enkel haar grootste en haar kleinste element. Die elementen komen overeen met de twee waarheidswaarden WAAR en VALS uit de tweewaardige booleaanse logica. Er zijn al veel inspanningen geleverd voor

het op poten zetten van meerwaardige logica's. De verzameling van waarheidswaarden is daarbij veelal een begrensde tralie L die meer dan twee elementen bevat. Logische operatoren zijn dan afbeeldingen die één of meerdere waarheidswaarden uit L afbeelden op een element van L . De meet- en de joinbewerking van L kunnen gebruikt worden als logische operatoren voor conjunctie en disjunctie. Wanneer de tralie in kwestie niet distributief is, dan is het bestaan van een uniek complement in de zin van Definitie 2.12 voor elk element echter niet meer gegarandeerd. Voor logische operatoren voor negatie en implicatie, maar ook voor conjunctie en disjunctie, worden dan ook ruimere definities vooropgesteld. Een vuistregel daarbij is dat de restricties tot $\{0, 1\}$ van deze logische operatoren samenvallen met hun booleaanse tegenhangers. Om verder betekenis te geven, worden er bovendien eisen gesteld aangaande het monotoon karakter van de logische operatoren, en worden er eventueel nog andere randvoorwaarden opgelegd.

Veel van het pionierswerk op dit vlak is verricht voor $[0, 1]$ als verzameling van waarheidswaarden, in het kader van vaaglogica en, daarmee samenhangend, vaagverzamelingenleer. Zadeh [101] stelde aanvankelijk voor om gebruik te maken van $([0, 1], \min, \max)$ met $\min$ en $\max$ als logische operatoren voor respectievelijk conjunctie en disjunctie. Daarnaast gebruikte hij voor negatie de $[0, 1]$ - $[0, 1]$ -afbeelding $\mathcal{N}_s$, gedefinieerd als $\mathcal{N}_s(x) = 1 - x$. Men ziet eenvoudig in dat dan niet voor alle x in $[0, 1]$, $\mathcal{N}_s(x)$ het complement is van x in de zin van Definitie 2.12. Er is m.a.w. niet aan de wet van het uitgesloten derde voldaan. Sinds deze wet omstreeks 350 voor Chr. door Aristoteles als tautologie geponeerd werd, is het wetenschappelijk denken er door de eeuwen heen zo van doordrongen geraakt dat weinig wetenschappers haar in vraag stellen. Sommige wetenschappers zijn zelfs geneigd om op deze basis de ideeën van Zadeh te verwerpen, ook al vinden de meeste mensen het eigenlijk helemaal niet vreemd dat deze wet niet steeds gerespecteerd lijkt te worden in de realiteit (het is b.v. voor sommige mannen niet mogelijk om te zeggen of ze al dan niet kaal zijn). In de Lukasiewicz logica worden conjunctie en disjunctie gerepresenteerd door de logische operatoren $\mathcal{T}_W$ en $\mathcal{S}_W$, gedefinieerd als $\mathcal{T}_W(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ en $\mathcal{S}_W(x, y) = \min(x + y, 1)$ voor alle x en y in $[0, 1]$. Men gaat eenvoudig na dat deze samen met $\mathcal{N}_s$ wel voldoen aan de wet van het uitgesloten derde. Een opvallend verschil tussen de operatoren van Zadeh en die van Lukasiewicz is dat de laatste a.h.w. beide argumenten x en y verwerken tot een eindresultaat, terwijl de eerste kiezen voor het ene argument, daarbij het andere “weggooiend”. Zo werden er doorheen de jaren verschillende voorstellen geformuleerd voor logische operatoren voor conjunctie en disjunctie.

In de jaren '80 kwam er een grote impuls toen men inzag dat de concepten triangulaire norm en conorm, oorspronkelijk ontworpen door Schweizer and Sklar [90] voor het formuleren van driehoeksongelijkheden in probabilistische metrische ruimten, konden opgevat worden als algemene modellen voor dit soort logische operatoren. Hoewel oorspronkelijk gedefinieerd voor $[0, 1]$ hebben triangulaire normen en conormen eigenlijk geen vereiste kenmerken die hen definitiegewijs zouden binden aan het reële eenheidsinterval. Verscheidene auteurs hebben dan ook de veralgemening naar partieel geordende verzamelingen bestu-

deerd (zie o.m. [21], [38], [43]). We zetten hierna enkele belangrijke resultaten op een rijtje.

Negatoren, triangulaire normen en conormen

2.19. Definitie (Negator). Een negator $\mathcal{N}$ op een begrensde tralie L is een dalende $L - L$ afbeelding die voldoet aan $\mathcal{N}(0) = 1$ en $\mathcal{N}(0) = 1$. $\mathcal{N}$ wordt involutief genoemd als $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$ voor alle x in L .

2.20. Voorbeelden. [18] Zij L een begrensde tralie, dan zijn de $L - L$ afbeeldingen N_l en N_u bepaald door

$$N_l(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } x = 0 \\ 0, & \text{elders} \end{cases} \quad N_u(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } x < 1 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

voor alle x in L , negatoren op L .

2.21. Voorbeeld. De standaardnegator $\mathcal{N}_s$ op $[0, 1]$ gedefinieerd als $\mathcal{N}_s(x) = 1 - x$ is een involutieve negator.

2.22. Hulpstelling (Morfismegedrag). [18] Zij L een complete tralie en $\mathcal{N}$ een negator op L . Als $\mathcal{N}$ involutief is, dan is $\mathcal{N}$ een duaal infmorfisme en een duaal supmorfisme.

2.23. Definitie (Triangulaire norm). Een triangulaire norm $\mathcal{T}$ (kortweg t-norm) op een begrensde tralie L is een stijgende, associatieve en commutatieve $L^2 - L$ afbeelding die voldoet aan de randvoorwaarde $\mathcal{T}(1, x) = x$ voor alle x in L .

2.24. Definitie (Triangulaire conorm). Een triangulaire conorm $\mathcal{S}$ (kortweg t-conorm) op een begrensde tralie L is een stijgende, associatieve en commutatieve $L^2 - L$ afbeelding die voldoet aan de randvoorwaarde $\mathcal{S}(0, x) = x$ voor alle x in L .

Zoals uit bovenstaande definities blijkt, zit het verschil tussen triangulaire normen en conormen in de randvoorwaarden. Uit de definities vloeien bovendien nog andere randwaarden.

2.25. Hulpstelling. [38] Voor iedere triangulaire norm $\mathcal{T}$ en triangulaire conorm $\mathcal{S}$ op een begrensde tralie L geldt $\mathcal{T}(x, 0) = 0$ en $\mathcal{S}(x, 1) = 1$, voor alle x in L .

2.26. Definitie (Nuldelers). Zij L een begrensde tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en x en y in L . Men zegt dat x en y nuldelers zijn van $\mathcal{T}$ a.s.a.

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge \mathcal{T}(x, y) = 0$$

2.27. Voorbeelden. [38]

1. Zij L een begrensde tralie. Uit de definities volgt direct dat $\wedge$ is een triangulaire norm op L is, die wij vanaf nu ook zullen noteren als $\mathcal{T}_M$. Analoog is $\vee$ een triangulaire conorm op L , vanaf nu ook genoteerd als $\mathcal{S}_M$.
2. Zij L een begrensde tralie. De $L^2 - L$ afbeelding $\mathcal{T}_Z$ bepaald door

$$\mathcal{T}_Z(x, y) = \begin{cases} x, & \text{als } y = 1 \\ y, & \text{als } x = 1 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

is een triangulaire norm op L . De $L^2 - L$ afbeelding $\mathcal{S}_Z$ bepaald door

$$\mathcal{S}_Z(x, y) = \begin{cases} x, & \text{als } y = 0 \\ y, & \text{als } x = 0 \\ 1, & \text{elders} \end{cases}$$

is een triangulaire conorm op L . $\mathcal{T}_Z$ en $\mathcal{S}_Z$ worden wel eens de drastische t-norm en t-conorm genoemd.

2.28. Eigenschap. [38] Voor iedere triangulaire norm $\mathcal{T}$ en triangulaire conorm $\mathcal{S}$ op een begrensde tralie L geldt:

$$\mathcal{T}_Z(x, y) \leq \mathcal{T}(x, y) \leq \mathcal{T}_M(x, y)$$

$$\mathcal{S}_M(x, y) \leq \mathcal{S}(x, y) \leq \mathcal{S}_Z(x, y)$$

voor alle x en y in L .

Men gaat eenvoudig na dat de restricties tot $\{0, 1\}$ van een triangulaire norm en conorm inderdaad samenvallen met hun tweewaardige booleaanse tegenhangers voor conjunctie en disjunctie. Van Definities 2.23 en 2.24 bestaan zwakkere versies waarbij de eisen voor associativiteit en de commutativiteit achterwege gelaten worden. Men spreekt dan van seminormen en semiconormen. Indien ook de randvoorwaarden nog verder afgezwakt worden, spreekt men van conjunctoren en disjunctoren. Zoals aangehaald in Voorbeelden 2.27 zijn er op iedere begrensde tralie steeds minstens twee triangulaire normen en conormen voor handen. In werkelijkheid zijn het er vaak zelfs veel meer: op een eindige ketting met 6 elementen zijn er 94 t-normen voorhanden, terwijl er b.v. op een eindige ketting met 12 elementen meer dan 4 miljoen zijn [76]. Eén van de moeilijkheden bij het ontwerpen van een applicatie is de keuze van geschikte logische operatoren. De voorwaarden die definitiegewijs opgelegd zijn aan triangulaire normen en conormen zijn volgens ons zeer zinvol, en beperken de verzameling van keuzemogelijkheden door er de beste kandidaten uit te pikken. We kiezen er dan ook bewust voor in dit werk minstens de eisen uit Definities 2.23 en 2.24 aan de logische operatoren voor conjunctie en disjunctie op te leggen. Soms kunnen een t-norm en een t-conorm met elkaar in verband gebracht worden m.b.v. een negator.

Triangulaire norm	Triangulaire conorm
$\mathcal{T}_M(x, y) = \min(x, y)$ $\mathcal{T}_P(x, y) = x \cdot y$ $\mathcal{T}_W(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$	$\mathcal{S}_M(x, y) = \max(x, y)$ $\mathcal{S}_P(x, y) = x + y - x \cdot y$ $\mathcal{S}_W(x, y) = \min(x + y, 1)$

Tabel 2.1: Triangulaire normen en conormen op $[0, 1]$

2.29. Definitie (Duale afbeelding). Zij $\mathcal{N}$ een negator op een begrensde tralie L . De duale afbeelding van een $L^2 - L$ afbeelding f t.o.v. $\mathcal{N}$ is de $L^2 - L$ afbeelding $f^{\leftrightarrow \mathcal{N}}$ gedefinieerd als

$$f^{\leftrightarrow \mathcal{N}}(x, y) = \mathcal{N}(f(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)))$$

voor alle x en y in L .

Als $\mathcal{N}$ een involutieve negator is dan geldt enerzijds $(f^{\leftrightarrow \mathcal{N}})^{\leftrightarrow \mathcal{N}} = f$ en anderzijds dat de duale afbeelding van een t-norm (respectievelijk t-conorm) t.o.v. $\mathcal{N}$ een t-conorm (respectievelijk t-norm) is [38].

2.30. Voorbeelden. 1. De $[0, 1]^2 - [0, 1]$ afbeeldingen $\mathcal{T}_M$, $\mathcal{T}_P$ en $\mathcal{T}_W$ gedefinieerd in Tabel 2.1 zijn triangulaire normen op $[0, 1]$; men spreekt respectievelijk over de minimum t-norm, de produkt t-norm en de Łukasiewicz t-norm (ook vette doorsnede genoemd). De afbeeldingen $\mathcal{S}_M$, $\mathcal{S}_P$ en $\mathcal{S}_W$ gedefinieerd in dezelfde tabel zijn triangulaire conormen op $[0, 1]$; het zijn respectievelijk de maximum t-conorm, de produkt t-conorm (ook probabilistische som genoemd) en de Łukasiewicz t-conorm (ook begrensde som genoemd). Bovendien geldt $\mathcal{T}_M^{\leftrightarrow \mathcal{N}_s} = \mathcal{S}_M$, $\mathcal{T}_P^{\leftrightarrow \mathcal{N}_s} = \mathcal{S}_P$ en $\mathcal{T}_W^{\leftrightarrow \mathcal{N}_s} = \mathcal{S}_W$ en

$$\mathcal{T}_Z(x, y) \leq \mathcal{T}_W(x, y) \leq \mathcal{T}_P(x, y) \leq \mathcal{T}_M(x, y)$$

$$\mathcal{S}_M(x, y) \leq \mathcal{S}_P(x, y) \leq \mathcal{S}_W(x, y) \leq \mathcal{S}_Z(x, y)$$

voor alle x en y in $[0, 1]$.

2. Voor alle α in $]1, 2[$ en β in $]0, \alpha - 1[$ is de $[0, 1]^2 - [0, 1]$ afbeelding $T_{\alpha, \beta}$ gedefinieerd als

$$T_{\alpha, \beta}(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & \text{als } \max(x, y) = 1 \\ \beta, & \text{als } \max(x, y) < 1 \text{ en } \alpha \leq x + y \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

voor alle x en y in $[0, 1]$, een triangulaire norm op $[0, 1]$ (zie [18]).

Implicatoren

Van alle logische operatoren bestaat de grootste verscheidenheid in de literatuur wellicht voor de implicatie. Dit komt waarschijnlijk omdat er in de booleaanse logica verschillende zinvolle manieren zijn om $\Rightarrow$ te schrijven in functie van $\vee$, $\wedge$ en $\neg$ en de L -vaaglogische tegenhangers van deze uitdrukkingen niet noodzakelijk gelijkwaardig zijn. Maar zelfs de overkoepelende definitie van implicator verschilt soms redelijk veel van auteur tot auteur. Vooraleer we “onze favoriet” geven, herhalen we eerst de definitie van partiële afbeelding.

2.31. Definitie (Partiële afbeeldingen). Zij X , Y en Z verzamelingen, zij f een $(X \times Y)$ - Z afbeelding en zij (x_0, y_0) een element van $X \times Y$. De eerste partiële afbeelding van f in (x_0, y_0) is dan de X - Z afbeelding $f(., y_0)$ gedefinieerd als

$$f(., y_0)(x) = f(x, y_0)$$

voor alle x in X . De tweede partiële afbeelding van f in (x_0, y_0) is dan de Y - Z afbeelding $f(x_0, .)$ gedefinieerd als

$$f(x_0, .)(y) = f(x_0, y)$$

voor alle y in Y .

2.32. Definitie (Implicator). Een implicator $\mathcal{I}$ op een begrensde tralie L is een $L^2 - L$ afbeelding met dalende eerste en stijgende tweede partiële afbeeldingen die voldoet aan de randvoorwaarden $\mathcal{I}(1, x) = x$ voor alle x in L en $\mathcal{I}(0, 0) = 1$.

Men gaat opnieuw eenvoudig na dat de restrictie van een implicator tot $\{0, 1\}$ samenvalt met zijn tweewaardige booleaanse tegenhanger. In de literatuur wordt de logische operator uit Definitie 2.32 meestal omschreven als randimplicator, terwijl een zwakkere versie (met afgezwakte randvoorwaarden, en soms zelfs zonder de gemengde monotoniteit) als definitie voor implicator gebruikt wordt. Het implicatorbegrip dat op die manier ontstaat, wordt meestal op dezelfde hoogte gebruikt als b.v. triangulaire norm, wat onterecht lijkt: waarom zou men aan de ene logische operator “strengere” randvoorwaarden opleggen, en aan de andere niet? Zoals hierboven uiteengezet, kiezen we bewust voor de iets strengere aanpak om de keuze voor een concrete logische operator bij het ontwerp van een toepassing te vergemakkelijken.

2.33. Hulpstelling (Absorptiebeginsel). [18] Voor elke implicator $\mathcal{I}$ op een begrensde tralie L en voor alle x in L geldt

$$\mathcal{I}(0, x) = \mathcal{I}(x, 1) = 1$$

2.34. Hulpstelling. Voor elke implicator $\mathcal{I}$ op een begrensde tralie L en voor alle x en y in L geldt

$$\mathcal{I}(x, y) \leq y$$

Bewijs. Volgt onmiddellijk uit $\mathcal{I}(x, y) \leq \mathcal{I}(1, y) = y$.

2.35. Hulpstelling. [18] Zij L een begrensde tralie en $\mathcal{I}$ een implicator op L dan is de partiële afbeelding $\mathcal{I}(\cdot, 0)$ een negator op L .

2.36. Definitie (Geïnduceerde negator). Zij L een begrensde tralie en $\mathcal{I}$ een implicator op L , dan is de door $\mathcal{I}$ geïnduceerde negator de $L - L$ afbeelding $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ gedefinieerd als $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}(x) = \mathcal{I}(x, 0)$ voor alle x in L .

In de booleaanse logica definieert men $p \Rightarrow q$ vaak als $\neg p \vee q$. De L -vaaglogische veralgemening hiervan is het begrip S-implicator.

2.37. Hulpstelling. [18] Zij L een begrensde tralie, $\mathcal{S}$ een triangulaire conorm op L en $\mathcal{N}$ een negator op L , dan is de $L^2 - L$ afbeelding $\mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}}$, gedefinieerd als $\mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}}(x, y) = \mathcal{S}(\mathcal{N}(x), y)$, voor alle x en y in L , een implicator op L . Bovendien valt $\mathcal{N}$ samen met de negator geïnduceerd door $\mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}}$.

2.38. Definitie (S-implicator geïnduceerd door $\mathcal{S}$ en $\mathcal{N}$). Zij L een begrensde tralie, $\mathcal{S}$ een triangulaire conorm op L en $\mathcal{N}$ een negator op L , dan noemt men de $L^2 - L$ afbeelding $\mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}}$, gedefinieerd als $\mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}}(x, y) = \mathcal{S}(\mathcal{N}(x), y)$, voor alle x en y in L , de S-implicator geïnduceerd door $\mathcal{S}$ en $\mathcal{N}$.

2.39. Hulpstelling. [18] Zij L een begrensde tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en $\mathcal{N}$ een negator op L . Als $\mathcal{N}$ involutief is, dan is $\mathcal{I}_{\mathcal{T} \leftrightarrow \mathcal{N}, \mathcal{N}}(x, y) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(x, \mathcal{N}(y)))$ voor alle x en y in L .

Om de notatie te verlichten, definiëren we ook het concept S-implicator geïnduceerd door een t-norm en een involutieve negator.

2.40. Definitie (S-implicator geïnduceerd door $\mathcal{T}$ en $\mathcal{N}$). Zij L een begrensde tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en $\mathcal{N}$ een involutieve negator op L , dan is de S-implicator geïnduceerd door $\mathcal{T}$ en $\mathcal{N}$ de $L^2 - L$ afbeelding $\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}$ bepaald door $\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(x, y) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(x, \mathcal{N}(y)))$ voor alle x en y in L .

2.41. Hulpstelling (Aftakkingsprincipe). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L , $\mathcal{N}$ een involutieve negator en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}$ de geïnduceerde S-implicator, dan geldt

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(\mathcal{T}(x, y), z) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(y, z))$$

voor alle x, y en z in L .

Bewijs. Voor x, y en z in L geldt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(y, z)) &= \mathcal{N}(\mathcal{T}(x, \mathcal{N}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(y, z)))) \\ &= \mathcal{N}(\mathcal{T}(x, \mathcal{N}(\mathcal{N}(\mathcal{T}(y, \mathcal{N}(z)))))) \\ &= \mathcal{N}(\mathcal{T}(x, \mathcal{T}(y, \mathcal{N}(z)))) \\ &= \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{T}(x, y), \mathcal{N}(z))) \\ &= \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(\mathcal{T}(x, y), z) \end{aligned}$$

□

S-implicator	Residuele implicator
$\mathcal{I}_{\mathcal{T}_M, \mathcal{N}_s}(x, y) = \max(1 - x, y)$	$\mathcal{I}_M(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \leq y \\ y, & \text{anders} \end{cases}$
$\mathcal{I}_{\mathcal{T}_P, \mathcal{N}_s}(x, y) = 1 - x + x \cdot y$	$\mathcal{I}_P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{anders} \end{cases}$
$\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W, \mathcal{N}_s}(x, y) = \min(1 - x + y, 1)$	$\mathcal{I}_W(x, y) = \min(1 - x + y, 1)$

Tabel 2.2: S-implicatoren en residuele implicatoren op $[0, 1]$

2.42. Voorbeeld. De eerste kolom uit Tabel 2.2 bevat de S-implicatoren op $[0, 1]$ geïnduceerd door de t-normen uit Tabel 2.1 en de involutieve standaardnegator $\mathcal{N}_s$. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_M, \mathcal{N}_s}$ wordt de Kleene-Dienes implicatie genoemd, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_P, \mathcal{N}_s}$ de Reichenbach implicatie en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W, \mathcal{N}_s}$ de Łukasiewicz implicatie.

Een belangrijke tautologie uit de booleaanse logica is de zgn. modus ponens, nl. $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$. Wanneer men dit vertaalt naar meerwaardige logica zou men kunnen stellen dat dit betekent dat de waarheidswaarde van $p \wedge (p \Rightarrow q)$ die van q niet overtreft. Uit enkele voorbeelden blijkt al vlug dat t-normen en hun geïnduceerde S-implicatoren zich hier absoluut niet naar schikken:

$$\mathcal{T}_M(0.5, \mathcal{I}_{\mathcal{T}_M, \mathcal{N}_s}(0.5, 0.4)) = 0.5 > 0.4$$

$$\mathcal{T}_M(0.2, \mathcal{I}_{\mathcal{T}_M, \mathcal{N}_s}(0.2, 0.4)) = 0.2 < 0.4$$

$$\mathcal{T}_P(0.5, \mathcal{I}_{\mathcal{T}_P, \mathcal{N}_s}(0.5, 0.2)) = 0.3 > 0.2$$

$$\mathcal{T}_P(0.1, \mathcal{I}_{\mathcal{T}_P, \mathcal{N}_s}(0.1, 0.2)) = 0.092 < 0.2$$

Jammer, want zo gaat een belangrijke techniek om afleidingen te maken de mist in. Er bestaat echter een andere klasse van implicatoren die ook geïnduceerd worden door een triangulaire norm en samen met deze t-norm wel aan de modus ponens voldoen. Deze implicatoren worden doorgaans telkens op één van twee mogelijke manieren gedefinieerd. A.d.h.v. een aantal eigenschappen leggen we uit dat voor een complete tralie de ene definitie eigenlijk een deelklasse definieert van de andere. Van de implicatoren uit deze deelklasse kunnen we met zekerheid zeggen dat ze voldoen aan de modus ponens.

2.43. Definitie (Rechterresiduüm). Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Het rechterresiduüm van $\mathcal{T}$ is de $L^2 - L$ afbeelding $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ gedefinieerd als

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y) = \sup\{\lambda \mid \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(x, \lambda) \leq y\}$$

voor alle x en y in L .

2.44. Eigenschap. Zij L een complete tralie. Als $\mathcal{T}$ een triangulaire norm is op L , dan is het rechterresiduüm $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ van $\mathcal{T}$ een implicator op L .

Bewijs. Stel x_1 en x_2 in L zo dat $x_1 \leq x_2$. Wegens de monotoniteit van $\mathcal{T}$ geldt dan voor alle λ in L dat $\mathcal{T}(x_1, \lambda) \leq \mathcal{T}(x_2, \lambda)$. Dus voor alle y in L geldt $\{\lambda | \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(x_2, \lambda) \leq y\} \subseteq \{\lambda | \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(x_1, \lambda) \leq y\}$, waaruit volgt dat $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(., y)$ dalend is. Bovendien is $\{\lambda | \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(y, \lambda) \leq x_1\} \subseteq \{\lambda | \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(y, \lambda) \leq x_2\}$ waaruit volgt dat $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, .)$ stijgend is. Tenslotte volgt uit $\mathcal{T}(1, y) = y$ dat $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(1, y) = y$, en uit $\mathcal{T}(0, 1) = 0$ dat $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(0, 0) = 1$. $\square$

2.45. Eigenschap. Zij L een complete tralie. Als $\mathcal{T}$ een triangulaire norm is op L , en $\mathcal{I}$ een L^2-L afbeelding is die voldoet aan de **residueringsvoorwaarde**

$$\mathcal{T}(x, y) \leq z \Leftrightarrow x \leq \mathcal{I}(y, z) \quad (2.1)$$

voor alle x, y en z in L , dan is $\mathcal{I}$ een implicator op L .

Bewijs. Stel x_1, x_2 en y in L zo dat $x_1 \leq x_2$. Uit $\mathcal{I}(x_2, y) \leq \mathcal{I}(x_2, y)$ volgt omwille van de residueringsvoorwaarde en de commutativiteit van $\mathcal{T}$ dat $\mathcal{T}(x_2, \mathcal{I}(x_2, y)) \leq y$ waaruit m.b.v. de residueringsvoorwaarde weer volgt $x_2 \leq \mathcal{I}(\mathcal{I}(x_2, y), y)$. Wegens het gestelde is dus ook $x_1 \leq \mathcal{I}(\mathcal{I}(x_2, y), y)$. Toepassen van de residueringsvoorwaarde levert $\mathcal{T}(x_1, \mathcal{I}(x_2, y)) \leq y$. Wegens de commutativiteit van $\mathcal{T}$ en de residueringsvoorwaarde volgt hier tenslotte uit $\mathcal{I}(x_2, y) \leq \mathcal{I}(x_1, y)$ waarmee aangetoond is dat de eerste partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ dalend zijn. Verder volgt m.b.v. de residueringsvoorwaarde uit $\mathcal{I}(y, x_1) \leq \mathcal{I}(y, x_1)$ dat $\mathcal{T}(\mathcal{I}(y, x_1), y) \leq x_1 \leq x_2$ en dus $\mathcal{I}(y, x_1) \leq \mathcal{I}(y, x_2)$ waarmee aangetoond is dat de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ stijgend zijn. Bovendien volgt voor alle x in L met de residueringsvoorwaarde uit $\mathcal{T}(x, 1) \leq x$ dat

$$x \leq \mathcal{I}(1, x) \quad (2.2)$$

Anderzijds volgt uit $\mathcal{I}(1, x) \leq \mathcal{I}(1, x)$ met de residueringsvoorwaarde dat

$$\mathcal{T}(\mathcal{I}(1, x), 1) \leq x$$

en dus

$$\mathcal{I}(1, x) \leq x \quad (2.3)$$

Uit (2.2) en (2.3) samen volgt nu dat $\mathcal{I}(1, x) = x$, voor alle x in L . Uit

$$\mathcal{T}(1, 0) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \mathcal{I}(0, 0)$$

leiden we tenslotte af dat $\mathcal{I}(0, 0) = 1$. $\square$

Op basis van bovenstaande twee eigenschappen kan men in theorie twee soorten van implicatoren definiëren, allebei op basis van een triangulaire norm. Eigenschap 2.44 is constructief en reikt een concrete uitdrukking voor de implicator aan. Eigenschap 2.45 beschrijft eerder het gedrag van de implicator. Toch gebruikt men in beide gevallen dezelfde naam, nl. residuele implicator. Uit Eigenschap 2.47 en 2.48 blijkt dat er inderdaad een sterk verband is.

2.46. Hulpstelling (Modus ponens). [18] Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn dan

$$\mathcal{T}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y)) \leq y$$

voor alle x en y in L .

2.47. Eigenschap. Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan voldoen $\mathcal{T}$ samen met zijn rechterresiduüm $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ aan de residueringsvoorwaarde (2.1).

Bewijs. Stel x, y en z in L . Als $\mathcal{T}(x, y) \leq z$ dan $x \leq \sup\{\lambda \mid \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(y, \lambda) \leq z\}$ en dus $x \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)$. Als anderzijds gegeven is dat $x \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)$ dan is, wegens het stijgend zijn van $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}(x, y) \leq \mathcal{T}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z), y)$. Wegens de commutativiteit van $\mathcal{T}$ en de modus ponens uit Hulpstelling 2.46 geldt dan $\mathcal{T}(x, y) \leq z$. $\square$

2.48. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en $\mathcal{I}$ een $L^2 - L$ afbeelding. Als $\mathcal{T}$ en $\mathcal{I}$ samen voldoen aan de residueringsvoorwaarde (2.1), dan zijn de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen en dan is $\mathcal{I}$ het rechterresiduüm van $\mathcal{T}$.

Bewijs. Stel $(x_i)_{i \in I}$ een familie in L en y in L . Wegens Hulpstelling 2.17 is

$$\sup_{i \in I} \mathcal{T}(x_i, y) \leq \mathcal{T}(\sup_{i \in I} x_i, y)$$

$\mathcal{T}(\sup_{i \in I} x_i, y)$ is m.a.w. een bovengrens voor $\{\mathcal{T}(x_i, y) \mid i \in I\}$. We bewijzen nu dat het de kleinste bovengrens is. Stel dat z een bovengrens is voor $\{\mathcal{T}(x_i, y) \mid i \in I\}$, dan geldt wegens de residueringsvoorwaarde $x_i \leq \mathcal{I}(y, z)$, voor alle i in I . Hieruit volgt

$$\sup_{i \in I} x_i \leq \mathcal{I}(y, z)$$

en dus m.b.v. de residueringsvoorwaarde

$$\mathcal{T}(\sup_{i \in I} x_i, y) \leq z$$

waaruit het gestelde. Tenslotte moeten we aantonen dat voor alle x en y in L geldt dat $\mathcal{I}(x, y) = \sup\{\lambda \mid \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(x, \lambda) \leq y\}$, m.a.w. dat $\mathcal{I}(x, y)$ het supremum is van de verzameling $\{\lambda \mid \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(x, \lambda) \leq y\}$ die we voor de eenvoud A noemen. Voor alle z in A geldt $\mathcal{T}(z, x) \leq y$ en dus wegens de residueringsvoorwaarde dat $z \leq \mathcal{I}(x, y)$. $\mathcal{I}(x, y)$ is m.a.w. een bovengrens voor A . Uit $\mathcal{I}(x, y) \leq \mathcal{I}(x, y)$ volgt m.b.v. de residueringsvoorwaarde dat $\mathcal{T}(\mathcal{I}(x, y), x) \leq y$ waaruit blijkt dat $\mathcal{I}(x, y) \in A$. Hieruit besluiten we $\sup A = \mathcal{I}(x, y)$. $\square$

Het rechterresiduüm van een triangulaire norm $\mathcal{T}$ kan steeds geconstrueerd worden en is wegens Eigenschap 2.44 bovendien een implicator. Uit Eigenschap 2.48 blijkt dat er enkel een $L^2 - L$ afbeelding $\mathcal{I}$ kan gevonden worden die samen met

$\mathcal{T}$ aan de residueringsvoorwaarde voldoet als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn. Bovendien is $\mathcal{I}$ dan het rechterresiduüm van $\mathcal{T}$. We opteren dan ook voor de volgende, constructieve, definitie.

2.49. Definitie (Residuele implicator). Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Met residuele implicator van $\mathcal{T}$ bedoelen we het rechterresiduüm $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ van $\mathcal{T}$.

We houden daarbij in het achterhoofd dat wanneer de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ aan de residueringsvoorwaarde voldoet. De door $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ geïnduceerde negator, voluit $\mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}$, noteren we ook kortweg als $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$.

2.50. Voorbeelden. De residuele implicatoren van de triangulaire normen uit Tabel 2.1 zijn weergegeven in de tweede kolom van Tabel 2.2. Het valt daarbij op dat de residuele implicator van $\mathcal{T}_W$ samenvalt met de S-implicator $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W, \mathcal{N}_s}$. $\mathcal{I}_M$ en $\mathcal{I}_P$ worden respectievelijk de Gödel en de Goguen implicatie genoemd. De partiële afbeeldingen van de triangulaire normen uit Tabel 2.1 zijn supmorfismen. De residuele implicatoren uit Tabel 2.2 voldoen dus aan de residueringsvoorwaarde. De geïnduceerde negator van $\mathcal{I}_W$ is (uiteraard nog steeds) de involutieve standaardnegator $\mathcal{N}_s$, terwijl $\mathcal{I}_M$ en $\mathcal{I}_P$ de niet-involutieve negator $\mathcal{N}_l$ induceren. De residuele implicator van $\mathcal{T}_Z$ op een complete tralie L is [18]

$$\mathcal{I}_Z(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \leq y \\ y, & \text{als } x = 1 \\ \sup(L \setminus \{1\}), & \text{anders} \end{cases}$$

De partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}_Z$ zijn geen supmorfismen. $\mathcal{T}_Z$ en $\mathcal{I}_Z$ voldoen inderdaad ook niet aan de residueringsvoorwaarde. Voor $L = [0, 1]$ is b.v. $1 \leq \mathcal{I}_Z(0.8, 0.7)$ maar niet $\mathcal{T}_Z(1, 0.8) \leq 0.7$. De door $\mathcal{I}_Z$ geïnduceerde negator $\mathcal{N}_Z$ is gedefinieerd als (zie [18])

$$\mathcal{N}_Z(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x = 0 \\ 0, & \text{als } x = 1 \\ \inf(L \setminus \{0\}), & \text{anders} \end{cases}$$

2.51. Eigenschap (Morfismegedrag). Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan zijn de eerste partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ duale supmorfismen en de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ infmorfismen.

Bewijs. Zij $(x_i)_{i \in I}$ een familie in L en y in L . Wegens Hulpstelling 2.17 geldt

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\sup_{i \in I} x_i, y) \leq \inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x_i, y)$$

Bovendien geldt voor alle j in I

$$\inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x_i, y) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x_j, y)$$

en dus ook

$$\mathcal{T}(x_j, \inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x_i, y)) \leq \mathcal{T}(x_j, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x_j, y)) \leq y$$

voor alle j in I , waarbij de laatste ongelijkheid volgt uit Hulpstelling 2.46. Vermits dit geldt voor alle j in I en aangezien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, volgt hieruit

$$\mathcal{T}(\sup_{j \in I} x_j, \inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x_i, y)) \leq y$$

en dus

$$\inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x_i, y) \in \{\lambda \mid \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(\sup_{j \in I} x_j, \lambda) \leq y\}$$

Aangezien het supremum van de laatste verzameling $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\sup_{i \in I} x_i, y)$ is, volgt daaruit het gestelde. Wat betreft de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ merken we op dat wegens Hulpstelling 2.17 voor elke x in L en voor elke familie $(y_i)_{i \in I}$ in L geldt

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, \inf_{i \in I} y_i) \leq \inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y_i)$$

Bovendien geldt voor alle j in I

$$\inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y_i) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y_j)$$

en dus ook

$$\mathcal{T}(x, \inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y_i)) \leq \mathcal{T}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y_j)) \leq y_j \quad (2.4)$$

voor alle j in I , waarbij de laatste ongelijkheid volgt uit Hulpstelling 2.46. Hieruit volgt

$$\mathcal{T}(x, \inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y_i)) \leq \inf_{j \in I} y_j$$

en dus

$$\inf_{i \in I} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y_i) \in \{\lambda \mid \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(x, \lambda) \leq \inf_{i \in I} y_i\}$$

Aangezien het supremum van de laatste verzameling $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, \inf_{i \in I} y_i)$ is, volgt daaruit het gestelde. $\square$

2.52. Hulpstelling. [18] Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L , dan geldt voor alle x en y in L

$$x \leq y \Rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y) = 1$$

2.53. Hulpstelling. [18] Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan geldt voor alle x en y in L

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y) = 1 \Rightarrow x \leq y$$

2.54. Hulpstelling (Zwak Aftakkingsprincipe). Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L , dan geldt

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(x, y), z) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z))$$

voor alle x, y en z in L .

Bewijs. Stel dat voor een x, y en z in L zou gelden dat

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(x, y), z) \not\leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z))$$

dan zou hier wegens de definitie van residuele impicator uit volgen

$$\{\lambda | \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(\mathcal{T}(x, y), \lambda) \leq z\} \not\subseteq \{\lambda | \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(x, \lambda) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)\},$$

wat betekent dat er een λ_0 bestaat zo dat $\mathcal{T}(\mathcal{T}(x, y), \lambda_0) \leq z$ en $\mathcal{T}(x, \lambda_0) \not\leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)$. Uit het laatste volgt wegens de definitie van residuele impicator echter $\mathcal{T}(y, \mathcal{T}(x, \lambda_0)) \not\leq z$ wat wegens de associativiteit en de commutativiteit van $\mathcal{T}$ in strijd is met het eerste. $\square$

2.55. Hulpstelling. Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan geldt

$$\mathcal{T}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y), z)$$

$$\mathcal{T}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y), z) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, \mathcal{T}(y, z))$$

voor alle x, y en z in L .

Bewijs. We bewijzen de eerste ongelijkheid. Het bewijs van de andere ongelijkheid verloopt analoog. Stel x, y en z in L . Uit Hulpstelling 2.46 volgt dat $\mathcal{T}(y, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)) \leq z$ maar ook dat $\mathcal{T}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y)) \leq y$. Wegens het stijgend karakter van $\mathcal{T}$ is dus $\mathcal{T}(\mathcal{T}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y)), \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)) \leq z$ wat wegens de associativiteit en de commutativiteit van $\mathcal{T}$ hetzelfde is als $\mathcal{T}(\mathcal{T}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)), \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y)) \leq z$. De residueringsvoorwaarde levert dan het gestelde. $\square$

2.56. Gevolg. Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan is de geïnduceerde negator $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ een duaal supmorfisme.

2.3 Basisbegrippen uit de L -vaagverzamelingenleer

2.57. Definitie (L -vaagverzameling). Zij L een tralie. Een L -vaagverzameling A in een universum X wordt gekarakteriseerd door een $X - L$ afbeelding die men de lidmaatschapsfunctie van A noemt en eveneens noteert als A . Voor alle x in X is $A(x)$ de lidmaatschapsgraad van x in de L -vaagverzameling A , d.w.z. de mate waarin x behoort tot A . De klasse van alle L -vaagverzamelingen in X noteert men als $\mathcal{F}_L(X)$.

Wanneer L het reële eenheidsinterval is spreekt men van $[0, 1]$ -vaagverzameling in X , of kortweg vaagverzameling in X . $\mathcal{F}_{[0,1]}(X)$ wordt afgekort tot $\mathcal{F}(X)$. Wanneer $L = \{0, 1\}$ dan zullen we het hebben over een scherpe verzameling in X . I.p.v. $\mathcal{F}_{\{0,1\}}(X)$ gebruiken we zoals gewoonlijk $\mathcal{P}(X)$.

2.58. Definitie (Niveauverzameling). Zij α een element van L en A een L -vaagverzameling in X , dan zijn de α -niveauverzameling A_α en de sterke α -niveauverzameling $A_{\overline{\alpha}}$ gedefinieerd als

$$A_\alpha = \{x | x \in X \wedge A(x) \geq \alpha\}$$

$$A_{\overline{\alpha}} = \{x | x \in X \wedge A(x) > \alpha\}$$

2.59. Definitie (Drager, kern). Zij L een begrensde tralie en A een L -vaagverzameling in X , dan is de drager van A de sterke 0-niveauverzameling $A_{\overline{0}}$ en de kern van A de 1-niveauverzameling A_1 . Drager en kern van A worden respectievelijk genoteerd als $\text{supp } A$ en $\text{ker } A$, hierbij verwijzend naar de engelstalige benamingen “support” en “kernel”.

2.60. Definitie (Hoogte, plint). Zij L een complete tralie en A een L -vaagverzameling in X , dan worden de hoogte en de plint van A respectievelijk gegeven door

$$\text{hgt } A = \sup_{x \in X} A(x) \quad \text{en} \quad \text{plt } A = \inf_{x \in X} A(x)$$

2.61. Definitie (Normale L -vaagverzameling). Zij L een begrensde tralie. Een L -vaagverzameling A in X wordt normaal genoemd indien $\text{ker } A \neq \emptyset$.

2.62. Definitie (Genormaliseerde L -vaagverzameling). Zij L een complete tralie. Een L -vaagverzameling A in X wordt genormaliseerd genoemd indien $\text{hgt } A = 1$.

Iedere niet-lege $[0, 1]$ -vaagverzameling A kan genormaliseerd worden (d.w.z. omgevormd tot een genormaliseerde $[0, 1]$ -vaagverzameling) door alle lidmaatschapsgraden te delen door $\text{hgt } A$.

Bewerkingen zoals unie, doorsnede en complement zijn in de scherpe verzamelingenleer gebaseerd op de binaire logische operatoren die we bij het begin van Sectie 2.2 vermeld hebben. Veralgemeningen van deze operatoren naar meerwaardige logica's met waarheidswaarden in L geven aanleiding tot unie, doorsnede en complement in de L -vaagverzamelingenleer.

2.63. Definitie (Complement, doorsnede, unie). Zij L een begrensde tralie, $\mathcal{N}$ een negator, $\mathcal{T}$ een t-norm en $\mathcal{S}$ een t-conorm op L . Als A en B L -vaagverzamelingen zijn in X , dan zijn $\text{co}_{\mathcal{N}} A$, $A \cap_{\mathcal{T}} B$ en $A \cup_{\mathcal{S}} B$ de L -vaagverzamelingen in X gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \text{co}_{\mathcal{N}} A (x) &= \mathcal{N}(A(x)) \\ A \cap_{\mathcal{T}} B (x) &= \mathcal{T}(A(x), B(x)) \\ A \cup_{\mathcal{S}} B (x) &= \mathcal{S}(A(x), B(x)) \end{aligned}$$

voor alle x in X . De zgn. Zadeh-doorsnede $A \cap_{\mathcal{T}_M} B$ en Zadeh-unie $A \cup_{S_M} B$ worden ook kortweg genoteerd als $A \cap B$ en $A \cup B$, terwijl $co A$ soms gebruikt wordt voor $co_{\mathcal{N}_s} A$. Als L een complete tralie is, dan definieert men voor een familie $(A_i)_{i \in I}$ van L -vaagverzamelingen in X

$$\bigcup_{i \in I} A_i(x) = \sup_{i \in I} A_i(x)$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i(x) = \inf_{i \in I} A_i(x)$$

voor alle x in X .

Men gaat eenvoudig na dat $(\mathcal{F}_L(X), \cap, \cup)$ een tralie is waarin de ordening gedefinieerd is als

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in X)(A(x) \leq B(x))$$

voor alle A en B in $\mathcal{F}_L(X)$. Er geldt dus

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

en omdat $A \cap B$ en $A \cup B$ respectievelijk infimum en supremum zijn van $\{A, B\}$ geldt dus ook voor elke C in $\mathcal{F}_L(X)$

$$C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B$$

$$A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

2.64. Hulpstelling. Zij L een complete tralie en $(A_i)_{i \in I}$ een niet-ledige familie van L -vaagverzamelingen in X , dan geldt voor alle j in I

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

Bewijs. De eerste inclusie volgt onmiddellijk uit het feit dat voor alle x in L

$$\bigcap_{i \in I} A_i(x) = \inf_{i \in I} A_i(x) \leq A_j(x)$$

De tweede inclusie kan op analoge manier bewezen worden. $\square$

2.65. Hulpstelling (Veralgemeende De Morgan wetten). [58] Zij L een complete tralie en $(A_i)_{i \in I}$ een familie van L -vaagverzamelingen in X , dan geldt

$$co(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} co A_i \quad \text{en} \quad co(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} co A_i$$

2.66. Definitie (Mate van overlap). Zij L een complete tralie. Voor $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L , en L -vaagverzamelingen A en B in X , wordt de mate van $\mathcal{T}$ -overlap van A en B gegeven door

$$\text{OVERL}(A, B) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), B(x))$$

2.67. Definitie (Mate van inclusie). [3] Zij L een complete tralie. Voor $\mathcal{I}$ een implicator op L , en L -vaagverzamelingen A en B in X , wordt de mate van $\mathcal{I}$ -inclusie van A in B gegeven door

$$\text{INCL}(A, B) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(A(x), B(x))$$

2.68. Definitie (L -vaagrelatie). Zij X en Y universa, dan is een L -vaagrelatie van X naar Y een L -vaagverzameling in $X \times Y$, i.e. een $(X \times Y) - L$ afbeelding. Een L -vaagrelatie op X (of nog: een L -vaagrelatie in X) is een L -vaagrelatie van X naar X .

2.69. Definitie (Inverse L -vaagrelatie). Zij R een L -vaagrelatie van X naar Y , dan is de inverse L -vaagrelatie R^{-1} de L -vaagrelatie van Y naar X bepaald door

$$R^{-1}(y, x) = R(x, y)$$

voor alle x in X en y in Y .

2.70. Definitie (Voorverzameling, naverzameling). Zij R een L -vaagrelatie van X naar Y , x_0 in X en y_0 in Y . De R -voorverzameling van y_0 is de L -vaagverzameling Ry_0 in X bepaald door $Ry_0(x) = R(x, y_0)$ voor alle x in X . De R -naverzameling van x_0 is de L -vaagverzameling x_0R in Y bepaald door $x_0R(y) = R(x_0, y)$ voor alle y in Y .

2.71. Definitie (Sup- $\mathcal{T}$ -compositie). Zij $\mathcal{T}$ een t-norm op een complete tralie L , zij R een L -vaagrelatie van X naar Y en S een L -vaagrelatie van Y naar Z , dan is de sup- $\mathcal{T}$ -compositie (of nog: de sup- $\mathcal{T}$ -samenstelling) van R en S de L -vaagrelatie van X naar Z bepaald door

$$R \circ_{\mathcal{T}} S(x, z) = \sup_{y \in Y} \mathcal{T}(R(x, y), S(y, z))$$

voor alle x in X en alle z in Z .

Deze sup- $\mathcal{T}$ -compositie van L -vaagrelaties mag niet verward worden met de samenstelling van afbeeldingen.

2.72. Definitie (Samengestelde afbeelding). De samengestelde afbeelding van een $X - Y$ afbeelding f en een $Y - Z$ afbeelding g is de $X - Z$ afbeelding $g \circ f$ (gelezen als “ g na f ”) gedefinieerd als $g \circ f(x) = g(f(x))$ voor alle x in X .

2.73. Definitie (Reflexief, symmetrisch, $\mathcal{T}$ -transitief). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en R een L -vaagrelatie in X .

1. R wordt reflexief genoemd a.s.a.

$$(\forall x \in X)(R(x, x) = 1)$$

2. R wordt symmetrisch genoemd a.s.a.

$$(\forall (x, y) \in X^2)(R(x, y) = R(y, x))$$

3. R wordt $\mathcal{T}$ -transitief genoemd a.s.a.

$$(\forall (x, y, z) \in X^3) (\mathcal{T}(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z))$$

2.74. Definitie (L -vage $\mathcal{T}$ -preorde). Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm. Een L -vaagrelatie R in X wordt een L -vage $\mathcal{T}$ -preorde (ook L -vage preorderelatie) genoemd a.s.a. R reflexief en $\mathcal{T}$ -transitief is.

2.75. Definitie (L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie). Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm. Een L -vaagrelatie R in X wordt een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie genoemd a.s.a. R een symmetrische L -vage $\mathcal{T}$ -preorde is.

2.76. Hulpstelling. Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Voor elke symmetrische en $\mathcal{T}$ -transitieve L -vaagrelatie R in X geldt

$$R(x, z) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(x, y), R(y, z))$$

voor alle x, y en z in X .

Bewijs. Stel x, y en z in X dan geldt, wegens de $\mathcal{T}$ -transitiviteit van R dat $\mathcal{T}(R(y, x), R(x, z)) \leq R(y, z)$. Hieruit volgt dat $R(x, z) \leq \sup\{\lambda | \lambda \in L \wedge \mathcal{T}(R(y, x), \lambda) \leq R(y, z)\}$ en dus wegens de definitie van $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ en de symmetrie van R het gestelde. $\square$

2.4 Enkele afspraken

Tenzij uitdrukkelijk anders vermeld zullen we doorheen dit proefschrift de symbolen X, Y, Z en U gebruiken om universa aan te duiden. Telkens we het hebben over een universum, bedoelen we een niet-ledige verzameling. Het universum is immers de verzameling van objecten waarover we iets willen zeggen.

Met L duiden wij vanaf nu steeds een tralie aan. Wanneer we het hebben over vaagverzamelingen, vaagrelaties, enz. dan veronderstellen we stilzwijgend dat het gaat om $[0, 1]$ -vaagverzamelingen, $[0, 1]$ -vaagrelaties enz. Wanneer we anderzijds schrijven over scherpe verzamelingen, scherpe relaties, enz. dan bedoelen we $\{0, 1\}$ -vaagverzamelingen, $\{0, 1\}$ -vaagrelaties enz. We zullen in dit geval meestal ook de traditionele notatie gebruiken: $A(x) = 1$ wordt daarbij genoteerd als $x \in A$, terwijl $A(x) = 0$ overeenkomt met $x \notin A$, voor alle x in X en alle A in $\mathcal{P}(X)$.

Doorheen dit werk duiden we met $\mathbb{R}$ de verzameling van de reële getallen aan, d.w.z. $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. $\mathbb{R}^+$ is de verzameling van de positieve reële getallen, d.w.z. $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. Tot slot van dit hoofdstuk herhalen we de definities van nog enkele wiskundige concepten, en voeren we tenslotte de concepten vast en blokkerend punt in.

2.77. Definitie (Tegengestelde functie). De $\mathbb{R}^+ - \mathbb{R}$ afbeelding T gedefinieerd als $T(x) = -x$, voor alle x in $\mathbb{R}^+$, wordt de tegengestelde functie genoemd.

2.78. Definitie (Translatie). Zij α in $\mathbb{R}$. De $\mathbb{R}^+ - \mathbb{R}$ afbeelding T_α gedefinieerd als $T_\alpha(x) = x + \alpha$, voor alle x in $\mathbb{R}^+$, wordt de translatie over α genoemd.

2.79. Definitie (Homothetie). Zij α in $\mathbb{R}$. De $\mathbb{R}^+ - \mathbb{R}$ afbeelding H_α gedefinieerd als $H_\alpha(x) = \alpha x$, voor alle x in $\mathbb{R}^+$, wordt de homothetie met factor α genoemd.

2.80. Definitie (Machtsfunctie). Zij α in $\mathbb{R}^+$. De $\mathbb{R}^+ - \mathbb{R}$ afbeelding $.^\alpha$ gedefinieerd als

$$.^\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x = 0 \\ \exp(\alpha \ln x), & \text{elders} \end{cases}$$

voor alle x in $\mathbb{R}^+$, wordt de machtsfunctie met exponent α genoemd. $.^\alpha(x)$ noteren we zoals gewoonlijk ook als x^α .

2.81. Definitie (Identieke afbeelding). Zij X een universum, dan is de identieke afbeelding op X de $X - X$ -afbeelding $\mathbb{I}_X$ bepaald door $\mathbb{I}_X(x) = x$ voor alle x in X .

2.82. Definitie (Vast punt). Zij f een $X - X$ afbeelding en x in X . We noemen x een vast punt van f indien $f(x) = x$.

Informeel gezegd kan een vast punt van f niet van zijn stoel geduwd worden door f . Hiernaast voeren wij nog de notie “blokkerend punt” in: een blokkerend punt van f kan niet alleen niet van zijn stoel geduwd worden, maar verhindert bovendien dat f andere punten op diezelfde stoel bij zou plaatsen.

2.83. Definitie (Blokkerend punt). Zij f een $X - X$ afbeelding en x in X . Een vast punt x van f wordt een blokkerend punt van f genoemd indien $\{y | y \in X \wedge f(y) = x\} = \{x\}$, m.a.w. indien $f^{-1}(\{x\}) = \{x\}$.

Hoofdstuk 3

Van linguïstische wijzigers naar vaagwizigers

In 1971 ontmoette Zadeh George Lakoff,
een kleurrijk professor in de linguïstiek.
“We begonnen te praten over dit en dat,
en het resultaat was dat er twee artikels
geschreven werden,” herinnert Zadeh zich.
“Eén door Lakoff en één door mij.”
Ze gingen allebei over wijzigers.
(vrij vertaald uit [72]).

Dit hoofdstuk slaat de brug tussen de linguïstische en de wiskundige aspecten van dit werk. We leggen uit wat linguïstische termen en linguïstische wijzigers zijn en hoe zij kunnen gemodelleerd worden in de L -vaagverzamelingenleer. Ons baserend op psycholinguïstisch onderzoek gaan we na welke eisen we dienen te stellen aan deze modellen. We bespreken de representatie van atomaire termen in detail. Aan de representatie van gewijzigde termen besteden we pas (zeer ruim) aandacht in de volgende hoofdstukken.

3.1 Linguïstische veranderlijken

Temperatuur kan beschouwd worden als een veranderlijke die numerieke waarden aanneemt zoals -3°C of 25°C , maar ook als een veranderlijke die linguïstische waarden aanneemt zoals bitter koud of warm. In het eerste geval spreekt men van een numerieke veranderlijke. Een veranderlijke die “woorden of zinnen in een natuurlijke of kunstmatige taal” als waarden aanneemt daarentegen wordt linguïstisch genoemd [106]. In [106] wordt een formele definitie gegeven van linguïstische veranderlijke, die we hier in licht gewijzigde vorm overnemen¹.

¹In [106] wordt een linguïstische veranderlijke gedefinieerd als een vijftal

3.1. Definitie (Linguïstische veranderlijke). [106] Een linguïstische veranderlijke X over een universum U wordt gekarakteriseerd door een koppel (G, M) waarin G een syntactische regel is voor het genereren van de linguïstische waarden van de veranderlijke en M een regel is voor het geven van betekenis aan die waarden.

De rol van G kan ingevuld worden door een contextvrije grammatica. De taal $L(G)$ voortgebracht door G is dan de verzameling van alle mogelijke waarden die de veranderlijke X kan aannemen. $L(G)$ wordt ook de termenverzameling van X genoemd en haar elementen **(linguïstische) termen**. Definitie 3.1 dekt een zeer ruime lading van mogelijkheden. Tal van uitdrukkingen uit het Nederlands kunnen optreden als linguïstische waarden. Zo kan “redelijk slecht” een waarde zijn van de linguïstische veranderlijke “rijvaardigheid”, “niet zeer jong en niet zeer oud” kan een waarde zijn van de linguïstische veranderlijke “leeftijd”, “zoete limonade” kan een waarde zijn van de veranderlijke “frisdrank”, “zingen” kan een waarde zijn van de veranderlijke “hobby”, “potlood” kan een waarde zijn van de veranderlijke “bureau-artikel” enz. In al deze voorbeelden zijn de termen uit $L(G)$ opgebouwd uit bijwoorden (b.v. redelijk, zeer), adjectieven (slecht, jong, oud, zoet), logische connectoren (niet, en), substantieven (limonade, potlood) en werkwoorden (zingen). In dit proefschrift zullen we dit gamma beperken tot een veel kleinere verzameling die toch nog zeer expressief is. Deze beperking kan doorgevoerd worden door de keuze voor een specifieke regel G die algemeen de volgende vorm aanneemt:

3.2. Definitie (Termengrammatica). Een termengrammatica G is een voortbrengende grammatica met als verzameling niet-terminalen $\{<term>\}$ (het enige niet-terminaal is tevens ook het startsymbool) en als verzameling terminalen $A_G \cup W_G \cup V \cup \{\text{niet}\}$ waarbij A_G een verzameling is van een, twee of drie Nederlandse² adjectieven, W_G een eindige verzameling is van Nederlandse³ bijwoorden bij adjectieven en $V = \{\text{en, of}\}$. De herschrijfgeregels van G zijn bovendien van de volgende vorm

$$\begin{aligned} <term> &\rightarrow a \\ <term> &\rightarrow \text{niet } <term> \\ <term> &\rightarrow <term> v <term> \\ <term> &\rightarrow w <term> \end{aligned}$$

waarbij a staat voor een element uit A , v voor een element uit V en w voor een element uit W .

$(X, L(G), U, G, M)$. M wordt daarbij “a semantic rule” genoemd. Om redenen die duidelijk zullen worden in Sectie 3.3 hebben we de benaming “*semantische* regel” niet overgenomen.

²Aangezien de literatuur omtrent de representatie van linguïstische termen in de vaagverzamelingenleer voor het overgrote deel in het Engels is, zullen we soms ook verwijzen naar syntactische regels waarin uitdrukkingen uit de Engelse i.p.v. de Nederlandse taal voorkomen. We streven er echter naar om ons eigen werk volledig af te stemmen op het Nederlands.

³Idem.

Een linguïstische veranderlijke die gekarakteriseerd wordt door een syntactische regel van bovenstaande vorm correspondeert over het algemeen met een Nederlands substantief. De bijwoorden bij adjectieven waarover sprake is in Definitie 3.2 zullen we in dit proefschrift omschrijven als **linguïstische wijzigers** (kortweg: wijzigers). Concrete invulling van de verzamelingen A_G en W_G uit Definitie 3.2 geeft aanleiding tot concrete grammatica's. In grammatica's die interessant zijn voor toepassingen bevat A_G veelal drie adjectieven, waaronder men een **primaire term**, zijn **antoniem** en een **gemiddelde term** kan onderscheiden. Novák e.a. [81] spreken in dit geval over een evaluerende linguïstische driedeling (*evaluating linguistic trichotomy*). Een term die enkel uit een adjectief bestaat, wordt een **atomaire term** genoemd, terwijl men alle andere termen **samengesteld** noemt. Een term die ontstaan is door het laten voorafgaan van een andere term door een wijziger, wordt om voor de hand liggende reden een **gewijzigde term** genoemd.

3.3. Voorbeeld. De termengrammatica G_1 met $A_{G_1} = \{\text{laag, gemiddeld, hoog}\}$ en $W_{G_1} = \{\text{min of meer, zeer}\}$ is een syntactische regel voor de linguïstische veranderlijke “temperatuur”. De primaire term hoog, zijn antoniem laag en de gemiddelde term gemiddeld zijn atomaire termen uit $L(G_1)$, terwijl niet zeer laag, laag of gemiddeld en min of meer hoog samengestelde termen zijn. De laatste term is bovendien een gewijzigde term. Een alternatieve syntactische regel G_2 wordt gegeven door de termengrammatica G_2 met $A_{G_2} = \{\text{laag, hoog}\}$ en $W_{G_2} = \{\text{minstens, min of meer, zeer}\}$. minstens zeer hoog is een voorbeeld van een gewijzigde, samengestelde term uit $L(G_2)$.

Een moeilijker maar zeer boeiend vraagstuk is het opstellen van de regel M die met elk van de termen gegenereerd door G een betekenis associeert. Men ziet vlug in dat de betekenis die gehecht wordt aan de termen afhankelijk is van de persoon die ze in de mond neemt: oud betekent niet hetzelfde voor een kind van 2 jaar als voor een vrouw van 95. Binnen het referentiekader van eenzelfde waarnemer hangt de betekenis van een linguïstische term bovendien nauw samen met het universum U waarover de veranderlijke gedefinieerd is. Inderdaad: groot in het universum van de muizen heeft een andere betekenis dan groot in het universum van de olifanten. Deze *afhankelijkheid van de waarnemer en van de context* vertaalt zich in de nood aan verschillende betekenisgevende regels voor verschillende waarnemers en verschillende contexten, al kan men wel een grote analogie tussen de betekenisgevende regels verwachten. In de linguïstiek zegt men dat de term verschillende extensies heeft in verschillende mogelijke werelden, al is de intensie dezelfde.

We merken terloops op dat het universum U vaak een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is: b.v. $[0, 120]$ wordt vaak gebruikt als universum voor de linguïstische veranderlijke leeftijd, $[0, 30]$ als universum voor bloeddruk, $\mathbb{N}$ als universum voor het aantal aanwezige mensen enz. Niettemin kan het universum U evengoed niet-numeriek zijn; denk b.v. aan het universum van mannelijke acteurs waarover de linguïstische veranderlijke “uiterlijk” kan gedefinieerd worden met termen zoals knap, geweldig knap en doorsnee.

De structuur van de termen uit de taal $L(G)$ zoals opgelegd door de termen-grammatica uit Definitie 3.2 leent zich tot een compositionele aanpak waarbij men de betekenis van een samengestelde term afleidt uit de betekenis van zijn samenstellende delen. Meer in het bijzonder hebben we af te rekenen met vier soorten bouwblokken — corresponderend met de vier soorten terminalen in Definitie 3.2 — namelijk de adjectieven, niet, de voegwoorden en de linguïstische wijzigers. De betekenissen van niet, de voegwoorden en de linguïstische wijzigers kunnen daarbij gezien worden als operatoren die inwerken op de betekenis van hun argumenten en nieuwe betekenissen genereren.

In de aanpak die gevolgd wordt in dit proefschrift wordt in navolging van [104, 106] elke term van de veranderlijke X voorgesteld door een L -vaagverzameling in U (met L een complete tralie). De regel M is dan een $L(G) - \mathcal{F}_L(U)$ afbeelding die met elke term t zijn betekenis associeert onder de vorm van een L -vaagverzameling $M(t)$ in U . Voor alle x in U kan $M(t)(x)$ dan ook opgevat worden als de mate waarin x aan t voldoet, of de mate waarin x compatibel is met t .

In dit kader wordt de betekenis van de voegwoorden voorgesteld door een $\mathcal{F}_L(U)^2 - \mathcal{F}_L(U)$ afbeelding, waarbij men een beroep doet op een t-norm $\mathcal{T}$ en een t-conorm $\mathcal{S}$ op L op de volgende manier (veralgemening van [104]):

$$M(t_1 \text{ en } t_2) = M(t_1) \cap_{\mathcal{T}} M(t_2)$$

$$M(t_1 \text{ of } t_2) = M(t_1) \cup_{\mathcal{S}} M(t_2)$$

voor de termen t_1 en t_2 van een linguïstische veranderlijke X . Op analoge manier wordt niet voorgesteld door een $\mathcal{F}_L(U) - \mathcal{F}_L(U)$ afbeelding m.b.v. een negator $\mathcal{N}$ (veralgemening van [104]):

$$M(\text{niet } t) = co_{\mathcal{N}}(M(t))$$

voor een term t . De betekenis van linguïstische wijzigers ten slotte wordt gerepresenteerd door een L -vaagwijziger.

3.4. Definitie. [L-vaagwijziger](Veralgemening van [93]) Een L -vaagwijziger op een universum U is een $\mathcal{F}_L(U) - \mathcal{F}_L(U)$ afbeelding.

We onderscheiden daarbij meteen 2 belangrijke deelklassen.

3.5. Definitie (Beperkend, uitbreidend). Zij m een L -vaagwijziger op een universum U . Indien voor alle A in $\mathcal{F}_L(U)$ geldt dat $m(A) \subseteq A$ dan wordt m beperkend genoemd. Indien daarentegen voor alle A in $\mathcal{F}_L(U)$ geldt dat $A \subseteq m(A)$ dan wordt m uitbreidend genoemd.

In de lijn van onze afspraak zullen we de termen $[0, 1]$ -vaagwijziger en vaagwijziger door elkaar gebruiken als synoniemen.

Dit proefschrift is volledig gewijd aan een deelaspect van het opstellen van de betekenisgevende regel, namelijk de representatie van linguïstische wijzigers door L -vaagwijzigers. Het voorhanden zijn van een representatie van de termen die

moeten gewijzigd worden, is echter onontbeerlijk om de kwaliteit van de vaagwijzigers na te gaan. In het dagelijkse taalgebruik zijn het vooral atomaire termen die gewijzigd worden. We kiezen er dan ook bewust voor om in eerste instantie de representatie van deze klasse aan een studie te onderwerpen. Op de modellering van samengestelde termen die buiten de klasse van de gewijzigde termen vallen, zullen we daarentegen niet verder gedetailleerd op in gaan.

In deze sectie hebben we notationeel onderscheid gemaakt tussen enerzijds de term t en anderzijds de betekenis van deze term, nl. de L -vaagverzameling $M(t)$. Vanaf nu zullen we het notationele verschil tussen een uitdrukking uit de natuurlijke taal en zijn representatie in de L -vaagverzamelingenleer niet langer aanhouden. Dit houdt o.m. in dat we de linguïstische term zelf zullen gebruiken als label voor de L -vaagverzameling die haar betekenis representeert. De expressie

$$\text{zeer oud} \subseteq \text{oud}$$

betekent dus dat de L -vaagverzameling die de betekenis van de term *zeer oud* modelleert een deelverzameling is van de L -vaagverzameling die de term *oud* representeert. We spreken in dit geval ook over de L -vaagverzameling *zeer oud* en de L -vaagverzameling *oud*. Een ander voorbeeld: als A een L -vaagverzameling is die de betekenis van een term t modelleert, is *zeer A* de L -vaagverzameling die de betekenis van *zeer t* representeert. Door deze afspraak verdwijnt het symbool M voor de betekenisgevende regel naar de achtergrond.

3.2 Typische lidmaatschapsfuncties

In het merendeel van de reeds ontwikkelde toepassingen van vaagverzamelingenleer is het universum (een deelverzameling van) $\mathbb{R}$. Voor dit geval zijn er allerlei typische lidmaatschapsfuncties voorhanden, afhankelijk van een klein aantal parameters dat kan aangepast worden zowel aan de context als aan de waarnemer. Deze manier van werken heeft een dubbel voordeel: enerzijds kan men, vertrekkend van een algemeen model, een lidmaatschapsfunctie op maat maken enkel door een paar parameters in te vullen. Anderzijds volstaat het om de waarde van die parameters bij te houden in het systeem om de volledige lidmaatschapsfunctie te kennen. We beschrijven hieronder een aantal belangrijke van deze “algemene-vorm-functies” die we later zullen gebruiken voor de representatie van linguïstische termen (zie ook [50],[58]). De gekozen algemene-vorm-functie voor een term komt a.h.w. overeen met de intensie, terwijl het invullen van de parameters toelaat het verschil tussen de extensies in verschillende werelden te vertolken.

3.6. Definitie (Lineaire lidmaatschapsfunctie). Voor α en β , in $\mathbb{R}$ zo dat $\alpha < \beta$ is de lineaire lidmaatschapsfunctie $\text{LIN}(\cdot; \alpha, \beta)$ de $\mathbb{R} - [0, 1]$ -afbeelding

gedefinieerd door

$$\text{LIN}(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{als } x \leq \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{als } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1, & \text{als } \beta \leq x \end{cases}$$

voor alle x in $\mathbb{R}$.

3.7. Definitie (Trapezoidale lidmaatschapsfunctie). Voor α, β, γ en δ in $\mathbb{R}$ zo dat $\alpha < \beta \leq \gamma < \delta$ is de trapezoidale lidmaatschapsfunctie $\text{TRAPEZ}(\cdot; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de $\mathbb{R} - [0, 1]$ -afbeelding gedefinieerd door

$$\text{TRAPEZ}(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} \text{LIN}(x; \alpha, \beta), & \text{als } x \leq \beta \\ 1, & \text{als } \beta \leq x \leq \gamma \\ 1 - \text{LIN}(x; \gamma, \delta), & \text{als } \gamma \leq x \end{cases}$$

voor alle x in $\mathbb{R}$.

3.8. Definitie (S-lidmaatschapsfunctie). Voor α en γ in $\mathbb{R}$ zo dat $\alpha < \gamma$ is de S-lidmaatschapsfunctie $S(\cdot; \alpha, \gamma)$ de $\mathbb{R} - [0, 1]$ -afbeelding gedefinieerd door

$$S(x; \alpha, \gamma) = \begin{cases} 0, & \text{als } x \leq \alpha \\ \frac{2(x-\alpha)^2}{(\gamma-\alpha)^2}, & \text{als } \alpha \leq x \leq (\alpha + \gamma)/2 \\ 1 - \frac{2(x-\gamma)^2}{(\gamma-\alpha)^2}, & \text{als } (\alpha + \gamma)/2 \leq x \leq \gamma \\ 1, & \text{als } \gamma \leq x \end{cases}$$

voor alle x in $\mathbb{R}$.

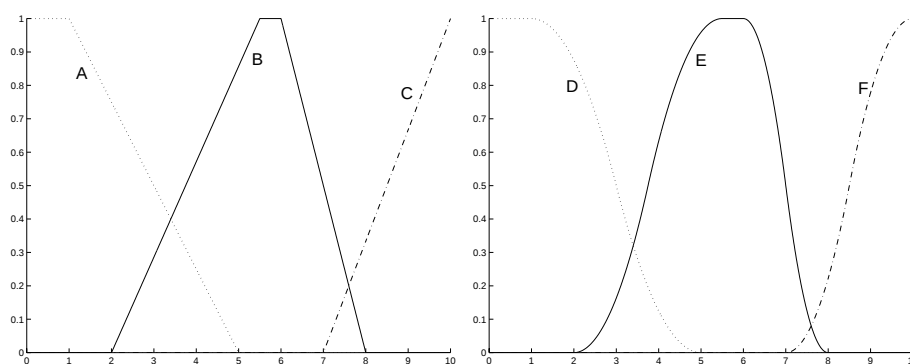
3.9. Definitie (π -lidmaatschapsfunctie). Voor α, β, γ en δ in $\mathbb{R}$ zo dat $\alpha < \beta \leq \gamma < \delta$ is de π -lidmaatschapsfunctie $\Pi(\cdot; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de $\mathbb{R} - [0, 1]$ -afbeelding gedefinieerd door

$$\pi(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} S(x; \alpha, \beta), & \text{als } x \leq \beta \\ 1, & \text{als } \beta \leq x \leq \gamma \\ 1 - S(x; \gamma, \delta), & \text{als } \gamma \leq x \end{cases}$$

voor alle x in $\mathbb{R}$.

De lineaire lidmaatschapsfuncties en de S-lidmaatschapsfuncties zijn stijgend. Voor iedere negator $\mathcal{N}$ op $[0, 1]$ zijn de $\mathcal{N}$ -complementen van deze lidmaatschapsfuncties dus dalend. De trapezoidale lidmaatschapsfuncties ontstaan a.h.w. door het “aan elkaar plakken” van een lineaire lidmaatschapsfunctie en het $\mathcal{N}_s$ -complement van een lineaire lidmaatschapsfunctie. Op dezelfde manier ontstaan de π -functies uit S-lidmaatschapsfuncties. In Figuur 3.1 worden ter illustratie de volgende typische lidmaatschapsfuncties afgebeeld:

$$\begin{array}{ll} A = co_{\mathcal{N}_s}(\text{LIN}(\cdot; 1, 5)) & D = co_{\mathcal{N}_s}(S(\cdot; 1, 5)) \\ B = \text{TRAPEZ}(\cdot; 2, 5.5, 6, 8) & E = \pi(\cdot; 2, 5.5, 6, 8) \\ C = \text{LIN}(\cdot; 7, 10) & F = S(\cdot; 7, 10) \end{array}$$



Figuur 3.1: Typische lidmaatschapsfuncties

3.3 Eisen en verwachtingen

De resultaten van een eerste, boeiend psycholinguïstisch onderzoek naar de bruikbaarheid van vaagverzamelingen voor het modelleren van begrippen uit de natuurlijke taal werden in 1976 gepubliceerd door Hersh en Caramazza [51]. De auteurs voerden verschillende experimenten uit en construeerden daaruit lidmaatschapsfuncties, gebruik makend van een techniek die later “stemmen” zou genoemd worden (zie Sectie 3.4). Bij een eerste experiment kregen 19 informanten een antwoordblad met 13 linguïstische termen in een willekeurige volgorde. Het ging daarbij o.a. om *large*, *very large* en *very very large* (groot, zeer groot en zeer zeer groot). Men gaf de proefpersonen de opdracht naar de eerste term te kijken. Vervolgens kregen ze elk van 12 vierkanten met een zijde variërend van 4 duim tot 48 duim één voor één in een willekeurige volgorde te zien. Er werd hen gevraagd in een daartoe voorziene ruimte voor elk vierkant aan te duiden of de term er op van toepassing was (ja of neen). Deze proef werd herhaald voor elk van de 13 termen. Om ervoor te zorgen dat iedereen dezelfde context in het achterhoofd had, werden de 12 vierkanten vóór het begin van het experiment getoond in stijgende volgorde.

De verhouding van het aantal ja-antwoorden tot het totaal aantal antwoorden voor een bepaald vierkant en een bepaalde term werd geïnterpreteerd als de lidmaatschapsgraad van dat vierkant in de vaagverzameling voor die term. De grafieken die op deze manier geconstrueerd werden, vertoonden een treffende gelijkens met de algemene lidmaatschapsfuncties die “voorspeld” waren in [104]. Hersh en Caramazza merkten zelf de gelijkens van de lidmaatschapsfuncties van *large*, *very large* en *very very large* met de stijgende S-lidmaatschapsfunctie op. De versterkende wijziger *very* bleek een beperkend effect te hebben: de lidmaatschapsfunctie van *very large* lag volledig “onder” die van *large*. Zoals men intuïtief gezien kon verwachten, was er ook een duidelijk verschil in kern en draager tussen *large* en *very large*. Zo werd een vierkant van 24 duim b.v. beschouwd

als *large* in (bijna) de mate 0.1, terwijl het in de mate 0 behoorde tot *very large*. Deze lijn zette zich ook door naar *very very large*. Er gold m.a.w.

$$\text{very very large} \subseteq \text{very large} \subseteq \text{large}$$

Deze verlaging van de lidmaatschapsgraden is een vertolking van het zgn. semantisch entailment [69] (entailment = het tot gevolg hebben).

Het tweede experiment verliep min of meer analoog, dit keer met slechts 4 informanten die allen de test tot 5 keer toe aflegden in een periode van 5 dagen. Hun antwoorden resulteerden bij 3 van de 4 proefpersonen in lidmaatschapsfuncties te vergelijken met die uit het eerste experiment. De vierde informant echter antwoordde systematisch op een andere manier: in tegenstelling tot de andere proefpersonen beschouwde hij het wijzigen door *very* niet als het definiëren van een kleinere vaagverzameling, deelverzameling van de oorspronkelijke. Hij interpreteerde *large*, *very large* en *very very large* als vage, overlappende klassen. De lidmaatschapsfuncties van *large* en *very large* waren daarbij gedeeltelijk stijgend en gedeeltelijk dalend zoals een π -functie, terwijl *very very large* net als in het eerste experiment veel weg had van een stijgende *S*-lidmaatschapsfunctie. Zo kreeg een vierkant dat lidmaatschapsgraad 1 had in de vaagverzameling *very very large* amper graad 0.4 in de vaagverzameling *large*.

Geboeid door deze resultaten organiseerden Hersh en Caramazza een nieuw experiment. Omdat ze vermoedden dat de vierde proefpersoon de termen herdefinieerde in relatie tot elkaar, kregen elk van de 45 informanten die aan de nieuwe test deelnamen slechts 1 term om te beoordelen. De vierkanten werden niet langer na elkaar getoond, maar genummerd en in stijgende volgorde vastgehecht aan een bord vooraan in de klas. Aan de proefpersonen werd gevraagd de nummers te noteren van de vierkanten waarop de term op hun antwoordblad van toepassing was.

De vermoedens die Hersh en Caramazza hadden i.v.m. de invloed van de wijze van vraagstelling bleken gegrond te zijn: de proefpersonen uit dit laatste experiment oordeelden in groep zoals de vierde informant uit het tweede experiment! Hersh en Caramazza concludeerden dan ook dat de termen kunnen geïnterpreteerd worden op 2 manieren: enerzijds de logische interpretatie — gehanteerd door alle proefpersonen van experiment 1 en drie op vier van experiment 2 — die semantisch entailment respecteert, en anderzijds de linguïstische interpretatie — gevolgd door de vierde informant uit experiment 2 en alle informanten uit het laatste experiment — die semantisch entailment niet lijkt te respecteren. Die vaststellingen lijken in strijd met de opvatting van Lakoff [69]. Deze laatste twijfelt er immers duidelijk niet aan dat semantisch entailment steeds geldig is ([69], p. 465):

For an example of how semantic entailment works, let P = 'John is very tall' and Q = 'John is tall'. Clearly P semantically entails Q Thus, no matter what John's height is, the value of 'John is very tall' will be less than or equal to the value of 'John is tall', and by the above definition the former will semantically entail the latter.

Deze opvatting wordt gedeeld door vele anderen, zowel in het kader van de vaagverzamelingenleer (zie b.v. [71], [80], [104]) als daarbuiten (zie b.v. [52]). Aan de mogelijkheid dat *tall* en *very tall* slechts gedeeltelijk overlappende klassen zijn, wordt er daarbij schijnbaar zonder meer voorbij gegaan. Toch vindt niet iedereen dit vanzelfsprekend.

In februari 1992 werd een enquête afgenomen bij 40 studenten uit de eerste en tweede licentie Germaanse filologie en 40 studenten uit de eerste kandidatuur informatica van de Universiteit Gent [15], [16]. De informanten werd o.m. gevraagd zinnen zoals de volgende aan te vullen:

Ik vind een man zeer oud als hij ... jaar is; oud als hij ... jaar is;
tamelijk oud als hij ... jaar is; gemiddeld/middelbare leeftijd als hij
... jaar is; tamelijk jong als hij ... jaar is; jong als hij ... jaar is en
zeer jong als hij ... jaar is.

Sommige proefpersonen vulden een interval in, anderen gaven een getal op dat bij de verwerking alsnog werd omgezet naar een interval. Met elk individueel antwoord werd vervolgens een vaagverzameling geassocieerd in het universum van de leeftijden waarvan de kern samenviel met het interval. Voor het “meest linkse interval” werd gekozen voor een dalende lidmaatschapsfunctie (te vergelijken met het complement van een S-lidmaatschapsfunctie), voor het “meest rechtse interval” werd gekozen voor een stijgende lidmaatschapsfunctie (te vergelijken met een S-lidmaatschapsfunctie), met de andere intervallen werd een gedeeltelijk stijgende en gedeeltelijk dalende lidmaatschapsfunctie geassocieerd (te vergelijken met een π -lidmaatschapsfunctie). Voor de “steilheid” van de hellingen van deze functies liet men zich leiden door de standaardafwijking t.o.v. de gemiddelde verkregen waarde voor elke linguïstische term. Ten slotte werden de lidmaatschapsfuncties geaggregeerd over alle proefpersonen heen, om te komen tot één finale vaagverzameling per linguïstische term. Het zal de lezer niet verwonderen dat de resulterende lidmaatschapsfuncties voor *zeer jong* en *zeer oud* respectievelijk dalend en stijgend waren, terwijl de andere termen bedeed werden met een gedeeltelijk stijgende en gedeeltelijk dalende lidmaatschapsfunctie. De meeste lidmaatschapsfuncties overlaptten elkaar maar geen enkele was volledig bevat in een andere. Semantisch entailment werd m.a.w. niet gerespecteerd. Cleeren e.a. besluiten daaruit dat *very A* geen loutere deelverzameling is van *A* [16]. Ook Devos [41] trekt op basis van de resultaten van deze enquête soortgelijke conclusies; in [40] omschrijft hij dit fenomeen als een probleem bij de voorstellingswijze van Zadeh uit [104].

Vanden Eynde [95] stelt zich dan weer zeer kritisch op tegenover dit soort conclusies. Enerzijds merkt hij op dat de vraagstelling bij de enquête uit [15] suggestief is en dat een conclusie als “*zeer groot* is geen deelverzameling van *groot*” reeds aanwezig is bij de interpretatie van de antwoorden. Anderzijds stelt hij ook vast dat sommige elementen uit het taalgebruik de behandeling van *groot* en *zeer groot* als onderscheiden, eventueel overlappende klassen rechtvaardigt. Hij haalt daarbij het voorbeeld aan van An die aan Bart de afwezige Christof beschrijft op de volgende manier: “Christof is groot.” Als Bart later vaststelt dat Christof 2.20m is, zou hij aan An kunnen zeggen: “Christof is niet

gróót, Christof is zéér groot.” De inclusie *zeer groot* $\subseteq$ *groot* zou een dergelijke uitspraak zinledig maken, hoewel zij toch kan beschouwd worden als normaal taalgebruik. Andere argumenten pleiten dan weer voor een behandeling van *zeer groot* als een deelverzameling van *groot*. Zo zal niemand die gevraagd wordt de grote boeken uit het rek te nemen de atlanten laten staan omdat ze *zeer groot* zijn.

Om klaarheid te brengen werd een mini-enquête uitgevoerd onder een 30-tal studenten die in twee groepen onafhankelijk van elkaar bevraagd werden [95]. De proefpersonen kregen een lijstje voorgeschoteld met daarop de lengte van 15 mannen, die aangeduid werden met een letter. De eerste groep kreeg de schriftelijke opdracht om alle grote mannen aan te duiden. Nadat deze opdracht uitgevoerd was, werd daar mondeling nog de opdracht aan toegevoegd om alle zeer grote mannen aan te duiden. De tweede groep daarentegen kreeg meteen de schriftelijke opdracht om alle grote én alle zeer grote mannen op te sommen. *Alle* mannen die door de 10 studenten uit groep 1 als *zeer groot* bestempeld werden, bleken volgens hen ook tot de klasse *groot* te behoren. De tweede groep informanten daarentegen maakte een onderscheid tussen beide klassen. Waar *alle* personen van groep 1 de mannen B (2.25m) en M (2.07m) als *groot* beschouwden had *geen enkele* informant van groep 2 ze bij die klasse geplaatst. Vanden Eynde herkent hierin twee mogelijke interpretaties: in de inclusieve interpretatie betekent groot zoveel als “gewoon groot of zeer groot”. In de niet-inclusieve interpretatie daarentegen betekent groot zoveel als “gewoon groot, niet zeer groot”. De benamingen van deze interpretaties zijn geïnspireerd door de vaststelling dat in de inclusieve interpretatie *zeer groot* begrepen is in *groot*. Het gaat hier om dezelfde twee interpretatiemogelijkheden waarmee ook Hersh en Caramazza in hun experimenten geconfronteerd werden.

Eenzijdige conclusies zoals die van Cleeren en van Devos komen volgens Vanden Eynde voort uit de verwarring van twee begrippen, nl. de graad van lidmaatschap en de graad van gepastheid. Het onderscheid tussen de twee hangt samen met dat tussen semantische en pragmatische betekenis. Semantische betekenis is de betekenis die letterlijk in woorden gelegen is. Semantiek houdt zich bezig met de vraag of een zin waar is. Pragmatische betekenis daarentegen is ‘toegevoegde’ betekenis, betekenis die we op basis van onze wereldkennis en een aantal algemene communicatieprincipes toevoegen aan de letterlijke betekenis van de woorden. Terwijl de semantiek naar de waarheidswaarde van een zin kijkt, kijkt de pragmatiek naar de gepastheid van een uiting in de context. Semantische en pragmatische betekenis kunnen samenvallen, al is dat lang niet altijd het geval. Vanden Eynde verwijst in dat verband naar de communicatiespelregels die geëxpliciteerd zijn door de taal filosoof H. Grice [48]. Volgens hem zul je, wanneer je de keuze hebt tussen een uiting A en een informatievere uiting B, steeds voor B kiezen op voorwaarde dat het geen linguïstische meerkost met zich meebrengt (doordat B b.v. omslachtiger is dan A). Pragmatisch gezien is het daarom onjuist om iemand van 2.20m groot te noemen: je kan hem beter zeer groot noemen. Aan de andere kant kan niemand beweren dat je liegt wanneer je zegt dat iemand van 2.20m groot is; die bewering is waar. Voor een voorbeeld waarbij pragmatische en semantische betekenis samenvallen, denken

we terug aan de vraag om alle grote boeken uit het rek te nemen. Bedoeld wordt: alle boeken die groot of zeer groot zijn.

Een gekend gevolg van de verwarring tussen lidmaatschapsgraad en gepastheidsgraad is dat zgn. niet typische vogels zoals pinguïns een lage lidmaatschapsgraad krijgen in de vaagverzameling “vogel”. Dit is onterecht: een pinguïn is een vogel en verdient bijgevolg lidmaatschapsgraad 1. Het is precies de gepastheidsgraad die eerder laag hoort te zijn. Gepastheid kan op dezelfde manier worden voorgesteld als lidmaatschap, nl. door een U - L afbeelding. Het ligt nu voor de hand te veronderstellen dat Zadeh, Lakoff, e.a. steeds de lidmaatschapsfuncties voor ogen hebben bij het modelleren van concepten als **groot** en **zeer groot**, terwijl Cleeren en Devos eigenlijk (onbewust) met gepastheidsfuncties bezig zijn.

Het is onze bedoeling om een stuk van dagelijks taalgebruik te modelleren. We kunnen ons dan ook niet beperken tot de semantische betekenis van linguïstische termen, wetend dat de pragmatische er kan van afwijken. In dit opzicht beschouwen we de regel M uit Definitie 3.1 als een pragmatische regel, een regel die de pragmatische betekenis hecht aan de waarden van een linguïstische veranderlijke. Deze betekenis kan samenvallen met de semantische (inclusieve interpretatie) maar kan er ook van verschillen (niet-inclusieve interpretatie). Strikt genomen kunnen we enkel in het eerste geval zeggen dat de betekenis van de term voorgesteld wordt door een L -vaagverzameling waarin elk element van het universum een lidmaatschapsgraad heeft. Toch zullen we, in navolging van de literatuur omtrent de representatie van linguïstische termen in de vaagverzamelingenleer, het in beide gevallen hebben over representatie van de betekenis door een L -vaagverzameling met een lidmaatschapsfunctie. We merken daarbij op dat er in die literatuur geen bewust onderscheid gemaakt wordt tussen de twee interpretaties. Men volgt ofwel de inclusieve interpretatie (zie b.v. [58], [69], [81], [104]), ofwel de niet-inclusieve (zie b.v. [1], [55]), ofwel zelfs een mengeling van beide (zie b.v. [39], [64]).

Het hierboven beschreven onderzoek werd voor het grootste deel uitgevoerd voor **zeer**, of zijn Engelse tegenhanger *very*. Deze linguïstische wijziger wordt ervaren als versterkend, d.w.z. dat **zeer** A een sterker concept is dan A . Ook de linguïstische wijziger **extreem** is versterkend, zij het in nog grotere mate dan **zeer**. Op analoge manier worden **tamelijk** en **een beetje** als verzwakkende wijzigers beschouwd, de tweede in grotere mate dan de eerste. Samenvattend kunnen we dus stellen dat de hierboven vermelde 4 wijzigers te ordenen zijn van meest versterkend naar meest verzwakkend als

$$\text{extreem} \preceq \text{zeer} \preceq \text{tamelijk} \preceq \text{een beetje} \quad (3.1)$$

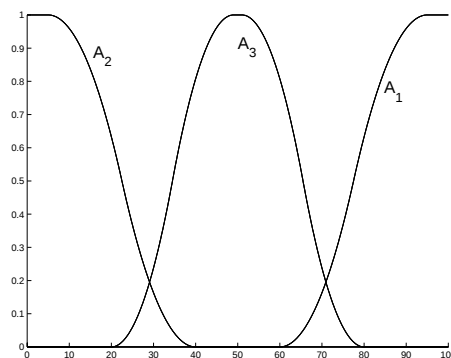
Deze ordening wordt zeker niet enkel gemotiveerd door onze eigen intuïtie. Vooral voor de Engelse taal zijn er studies beschikbaar die een ordening van linguïstische wijzigers vooropstellen. Zo werd in [82] de ordening van een aantal Engelse wijzigers experimenteel nagegaan. Een analoog experiment voor het Nederlands ondersteunt de in (3.1) voorgestelde ordening. Hiervoor maakten we gebruik van data verzameld in een internationale studie opgezet om beter

linguïstische term	gemiddelde waarde	standaarddeviatie
helemaal niet gehinderd	0.04	0.07
niet gehinderd	0.14	0.26
nauwelijks gehinderd	0.94	0.77
weinig gehinderd	1.24	0.65
iets gehinderd	1.57	1.03
lichtelijk gehinderd	1.64	0.99
een beetje gehinderd	1.65	0.94
enigzins gehinderd	2.59	1.34
matig gehinderd	3.44	1.38
tamelijk gehinderd	3.92	1.46
behoorlijk gehinderd	6.21	1.69
aanzienlijk gehinderd	6.81	1.56
veel gehinderd	6.90	1.19
erg gehinderd	7.42	1.08
sterk gehinderd	7.79	1.05
zeer gehinderd	8.02	0.87
ernstig gehinderd	8.05	1.01
enorm gehinderd	8.59	0.98
ontzettend gehinderd	8.74	0.93
uitermate gehinderd	8.91	1.02
extreem gehinderd	9.78	0.27

Tabel 3.1: Linguïstische termen uit de internationale geluidshinderstudie

te begrijpen wat mensen bedoelen wanneer ze geluidshinder omschrijven met termen als *zeer gehinderd*, *een beetje gehinderd*,... [44]. In het kader van deze studie, die volledig los stond van onderzoek m.b.t. de vaagverzamelingenleer en haar toepassingen, voerde men een enquête uit waarin men aan de proefpersonen vroeg om de betekenis van 21 linguïstische termen aan te duiden met een streepje op een lijnstuk van 10 cm. Daarbij mochten zij ervan uitgaan dat het linkeruiteinde van het streepje “helemaal geen hinder” betekende, terwijl het rechteruiteinde correspondeerde met “de grootste hinder die men zich kon voorstellen”. Deze enquête werd gehouden in 9 verschillende talen. Wat het Nederlands betreft namen in totaal 63 Nederlanders en 30 Vlamingen deel.

Tabel 3.1 geeft voor elke linguïstische term de gemiddelde afstand tussen het begin van het lijnstuk en het door de proefpersonen geplaatste streepje. Hoe groter de afstand, d.w.z. hoe verder het streepje op de lijn geplaatst werd, hoe sterker het concept beschreven door de linguïstische term werd ervaren. De ordening van de gemiddelde waarden volgt ordening (3.1). Maar ook op het niveau van de individuele proefpersonen blijft deze ordening gehandhaafd: maar liefst 88 proefpersonen volgden haar. Een dergelijke duidelijke ordening tekent zich niet af voor alle wijzigers. De gemiddelde waarden voor *behoorlijk* en *aanzienlijk* liggen b.v. heel dicht bij elkaar. 36 van de 93 proefpersonen zetten het streepje voor *behoorlijk* links van het streepje voor *behoorlijk*, terwijl de



Figuur 3.2: Lidmaatschapsfuncties voor de atomaire termen

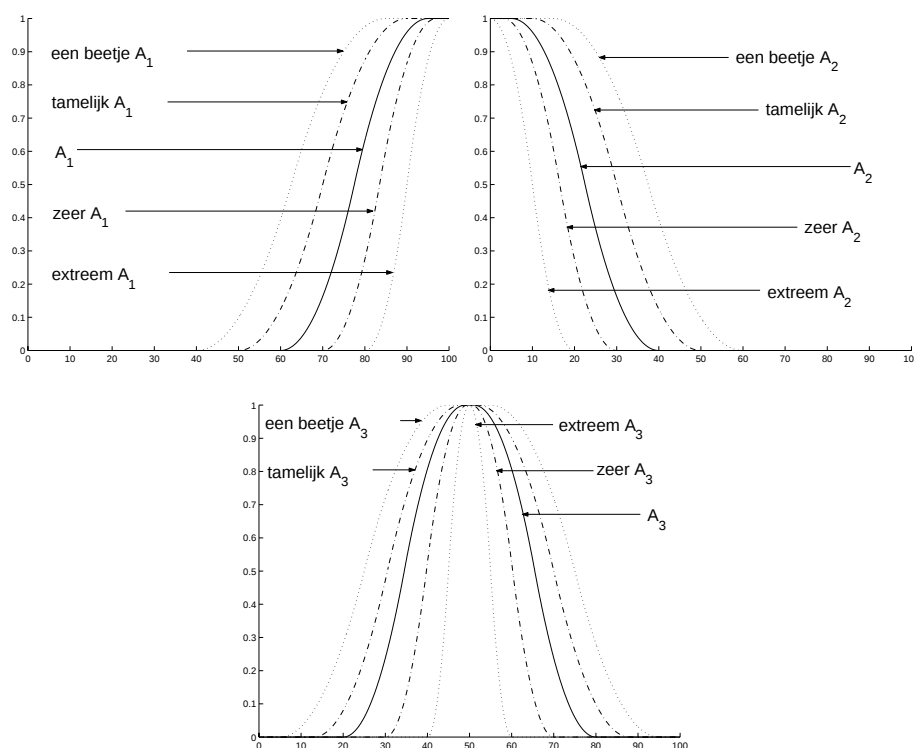
andere 57 het net andersom deden.

Zoals we reeds aanhaalden werd het psycholinguïstische onderzoek omtrent inclusieve en niet-inclusieve interpretatie uitgevoerd voor de linguïstische wijziger zeer. Met ordening (3.1) in het achterhoofd zullen we ook voor de andere wijzigers hieronder naar best vermogen weergeven wat er zich volgens ons afspeelt in het hoofd van iemand die de inclusieve respectievelijk de niet-inclusieve interpretatie hanteert. Bij deze beschouwingen laten we ons o.m. leiden door de vormen van de lidmaatschapsfuncties die algemeen gebruikt worden in de literatuur. Zoals o.m. uit het onderzoek van Hersh en Caramazza blijkt, lenen *S*-lidmaatschapsfuncties zich tot het modelleren van “stijgende” begrippen zoals groot, oud,... uiteraard op voorwaarde dat het universum een geschikte deelverzameling is van $\mathbb{R}$. Complementen van *S*-lidmaatschapsfuncties kunnen op analoge wijze gebruikt worden voor de representatie van “dalende” begrippen zoals klein, jong,... Benaderende termen zoals gemiddeld ten slotte kunnen voorgesteld worden voor π -lidmaatschapsfuncties. Wanneer het universum van een linguïstische veranderlijke dus een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, en de verzameling A_G van haar termengrammatica de linguïstische driedeling $A_G = \{A_1, A_2, A_3\}$ is met A_1 de primaire term, A_2 zijn antoniem en A_3 de gemiddelde term, dan kunnen we ons m.a.w. verwachten aan lidmaatschapsfuncties zoals diegene weergegeven in Figuur 3.2.

Inclusieve interpretatie. De inclusieve interpretatie, die aansluit bij de semantische betekenis, respecteert semantisch entailment. M.a.w. als A een sterker concept is dan B dan geldt $A \subseteq B$, of nog: de mate waarin x voldoet aan A is kleiner dan of gelijk aan de mate waarin x voldoet aan B . Gezien ordening (3.1) krijgen we dus voor elk term A :

$$\text{extreem } A \subseteq \text{zeer } A \subseteq A \subseteq \text{tamelijk } A \subseteq \text{een beetje } A \quad (3.2)$$

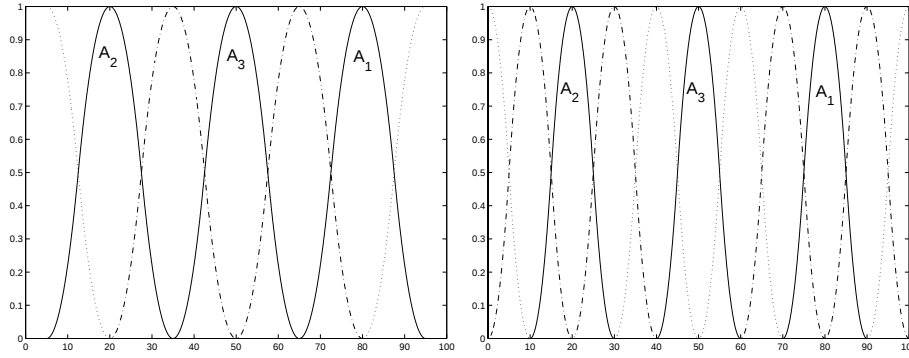
Dit betekent dat extreem en zeer zullen moeten voorgesteld worden door beperkende *L*-vaagwijzigers, terwijl we voor tamelijk en een beetje uitbreidende



Figuur 3.3: Gewijzigde termen in de inclusieve interpretatie

L -vaagwijzigers dienen te gebruiken. Figuur 3.3 toont mogelijke lidmaatschapsfuncties voor de gewijzigde termen van Figuur 3.2 die hieraan voldoen. We merken hierbij op dat niet iedereen het erover eens is dat gemiddelde termen kunnen gewijzigd worden door een versterkende wijziger zoals *zeer* (zie [81]). Volgens ons kan dit wel, maar zou de resulterende term een negatieve connotatie kunnen krijgen. Vergelijk b.v. “Zijn schoolresultaten zijn middelmatig.” met “Zijn schoolresultaten zijn zeer middelmatig.” waarbij in de tweede uitspraak de middelmatigheid van de schoolresultaten als een probleem lijkt ervaren te worden.

Niet-inclusieve interpretatie De niet-inclusieve interpretatie treedt op waar pragmatische en semantische betekenis van elkaar afwijken. Kenmerkend voor de pragmatische betekenis is haar ophefbaarheid. Wanneer er naast de atomaire termen ook gewijzigde linguïstische termen in het spel komen, kan de pragmatische betekenis van de atomaire termen veranderen, omdat de gewijzigde termen gepaster kunnen zijn dan de atomaire voor sommige elementen uit het universum. Figuur 3.4a) geeft weer wat er zich zou kunnen voordoen indien de termen

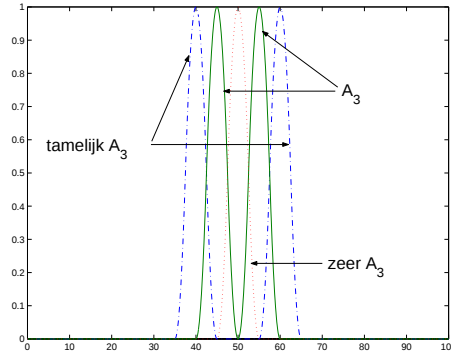


Figuur 3.4: Niet-inclusieve interpretatie: a) met 2 wijzigers. b) met 4 wijzigers

A_1 en A_2 uit Figuur 3.2 zouden gewijzigd worden met **zeer** en **tamelijk**. Figuur 3.4a) toont van links naar rechts lidmaatschapsfuncties voor **zeer** A_2 , A_2 , **tame-**lijk A_2 , A_3 , **tamelijk** A_1 , A_1 en **zeer** A_1 . De lidmaatschapsfuncties voor A_1 , A_2 en A_3 in Figuur 3.4a) zijn “smaller” dan de oorspronkelijke in Figuur 3.2. Wanneer vervolgens ook de termen met **extreem** en **een beetje** gewijzigd worden, kan de pragmatische betekenis van de reeds aanwezige termen weer veranderen. Een mogelijkheid wordt weergegeven in Figuur 3.4b) waarin van links naar rechts de lidmaatschapsfuncties afgebeeld zijn van **extreem** A_2 , **zeer** A_2 , A_2 , **tamelijk** A_2 , **een beetje** A_2 , A_3 , **een beetje** A_1 , **tamelijk** A_1 , A_1 , **zeer** A_1 en **extreem** A_1 .

Door gebrek aan voorbeelden uit de literatuur durven we niet met aanvaardbare zekerheid beweren wat er gebeurt wanneer ook de gewijzigde versies van de gemiddelde term in het spel komen. Mogelijk worden **tamelijk gemiddeld** en **gemiddeld** daardoor allebei Zadeh-unies van 2π -lidmaatschapsfuncties, terwijl **zeer gemiddeld** een smallere versie van de oorspronkelijke **gemiddeld** zou kunnen zijn (zie Figuur 3.5). De gemiddelde term wordt echter zelden of nooit gewijzigd. Dit hangt allicht samen met het feit dat in een applicatie meestal niet meer dan $7 (\pm 2)$ linguïstische termen betrokken zijn, corresponderend met het aantal verschillen die een mens vlot kan maken ([69]). Wanneer men vertrekt van een linguïstische driedeling en m.b.v. één versterkende en één verzwakkende wijziger de primaire term en zijn antoniem aanpakt, bekomt men in totaal reeds 7 termen. Zoals we reeds aanhaalden, bestaat er bovendien geen unanimititeit over de zin van het toepassen van versterkende wijzigers op **gemiddeld**.

We merken tenslotte op dat er binnen het modeltheoretisch kader kan overstapt worden van de ene interpretatie op de andere. Zoals Vanden Eynde aangaf, betekent groot in de inclusieve interpretatie zoveel als “gewoon groot of zeer groot”. M.b.v. de in Sectie 3.1 vermelde representatie van of komen we,



Figuur 3.5: Niet-inclusieve interpretatie: gemiddeld en gewijzigde termen

gebruik makend van een t-conorm $\mathcal{S}$, tot de volgende omzetting:

$$\text{groot}_I = \text{groot}_{NI} \cup_{\mathcal{S}} \text{zeer groot}_{NI}$$

waarbij de indexen I en NI verwijzen naar respectievelijk de inclusieve en de niet-inclusieve interpretatie. Voor de andere richting kan een analoge omzetting gerealiseerd worden. We hernemen Vanden Eynde: in de niet-inclusieve interpretatie betekent groot hetzelfde als “gewoon groot, niet zeer groot”. Gebruik makend van een t-norm $\mathcal{T}$ en een negator $\mathcal{N}$ bekomen we

$$\text{groot}_{NI} = \text{groot}_I \cap_{\mathcal{T}} \text{co}\mathcal{N}(\text{zeer groot}_I)$$

3.4 De constructie van lidmaatschapsfuncties

Er zijn twee soorten methoden gangbaar om lidmaatschapsfuncties voor atomaire termen te creëren. De eerste soort is kennisgedreven, terwijl de tweede de lidmaatschapsfuncties uit data puurt. Een combinatie van beide is ook mogelijk: zo kan een domeinexpert zich uitspreken over, en wijzigingen aanbrengen aan een lidmaatschapsfunctie die gegenereerd is met een datagedreven methode.

Kennisgedreven methoden

De eenvoudigste manier om aan een lidmaatschapsfunctie van een linguïstische term te geraken voor een bepaalde toepassing is om haar te laten tekenen door een expert uit het domein van die toepassing. Aangezien de basisbeginselen van de vaagverzamelingenleer eenvoudig uit te leggen zijn, is dit een haalbare methode. Men kan zich echter afvragen of kennis van de vaagverzamelingenleer niet een bepaalde invloed uitoefent op het constructieproces van lidmaatschapsfuncties wat een vertekend beeld zou kunnen geven. Met behulp van enquêtes kan men op allerlei manieren, de één al rechtstreekser dan de ander, de lidmaatschapsfunctie trachten te achterhalen (zie o.a. [51], [63], [70] en [108]). Zoals

al duidelijk werd in de vorige sectie, kunnen de manier van vraagstelling en de manier van verwerking van de antwoorden een significante impact hebben op de uiteindelijke lidmaatschapsfunctie.

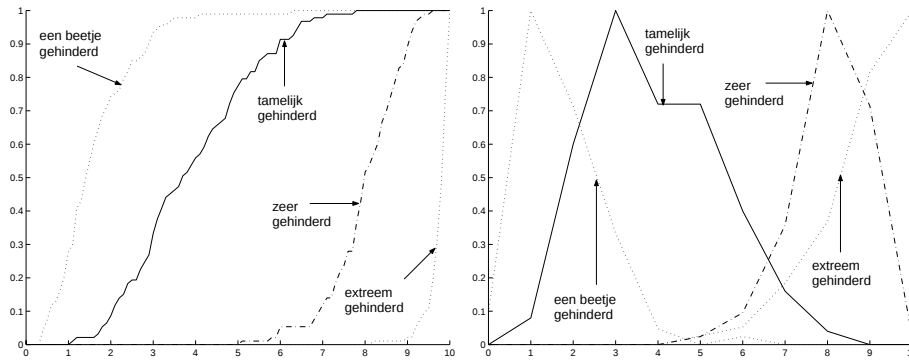
Het doel van de enquête is steeds: voor een aantal elementen x uit het universum de lidmaatschapsgraad van x in A achterhalen. Bij rechtstreekse waardering (*direct rating*) vraagt men één of meerdere experts vlakaf naar de lidmaatschapsgraad van sommige elementen uit het universum, b.v. “Op een schaal van 1 tot 10, hoe A is x ?” Bij omgekeerde waardering (*reverse rating*) worden de vragen in omgekeerde richting gesteld: “Welk element x heeft lidmaatschapsgraad y in A ?” Zo kan men b.v. vragen naar de elementen die lidmaatschapsgraad 0, 0.5 en 1 hebben. In de twee bovenstaande methoden worden de vragen rechtstreeks in de zin van lidmaatschapsgraden gesteld. Men kan ook subtieler te werk gaan door enkel ja/nee-vragen te stellen van de vorm “Behoort x tot A ?” en vervolgens $A(x)$ te berekenen als de verhouding van het aantal ja-antwoorden op het totaal aantal antwoorden. Deze techniek heet stemmen (*polling, voting*). Bij onrechtstreekse waardering (*indirect rating*) vervangt men dan weer de rechtstreekse toekenning van lidmaatschapsgraden door eenvoudigere taken, zoals paarsgewijze vergelijkingen. Voor twee elementen x_1 en x_2 uit het universum vraagt men b.v. “Op een schaal van 1 tot 10, in welke mate is x_1 A in vergelijking met x_2 ?”

Elk van de hierboven beschreven methoden resulteert in een aantal koppels (x, y) waarbij x een element uit het universum is en y een kandidaatwaarde voor de lidmaatschapsgraad. In het leeuwendeel van de tot dusver ontwikkelde toepassingen komen de lidmaatschapsgraden uit $[0,1]$. Zelfs wanneer men, zoals hierboven gesuggereerd, de experts laat kiezen op “een schaal van 1 tot 10” worden hun antwoorden meestal herschaald naar het reële eenheidsinterval. Indien er dan voor een bepaald element x slechts één koppel is met als eerste element x , dan is y de lidmaatschapsgraad van x in A . Indien er verschillende koppels zijn dan kan men het rekenkundig gemiddelde nemen van de y -waarden. Lidmaatschapsgraden die meer dan 0.5 verschillen van dit gemiddelde kunnen worden uitgesloten en het gemiddelde kan worden herberekend en geeft uiteindelijk $A(x)$. Indien het universum een geschikte deelverzameling van $\mathbb{R}$ is dan kan de volledige lidmaatschapsfunctie vervolgens geconstrueerd worden m.b.v. interpolatie of door het zoeken van de typische lidmaatschapsfunctie die best overeenkomt met de gevonden waarden.

Soms is ook expertkennis ter beschikking die niet noodzakelijk verzameld werd met het construeren van lidmaatschapsfuncties als doel voor ogen, zoals het geval is met de internationale geluidshinderstudie waarnaar we in de vorige sectie verwezen hebben. Toch zullen we op basis van de gegevens verzameld met deze enquête trachten lidmaatschapsfuncties te creëren voor

- A_1 = een beetje gehinderd
- A_2 = tamelijk gehinderd
- A_3 = zeer gehinderd
- A_4 = extreem gehinderd

In de stemmethode zoals Hersh en Caramazza die toepasten, werden voor elke



Figuur 3.6: Lidmaatschapsfuncties voor termen uit de geluidshinderstudie: a) inclusieve interpretatie. b) niet-inclusieve interpretatie

linguïstische term A_i ($i \in \{1, \dots, 13\}$) 12 vierkanten geëvalueerd. Zo bekwamen men voor elke term A_i 12 koppels van de vorm

$$(x_j, \langle \text{antwoord} \rangle)$$

met dus $j \in \{1, \dots, 13\}$ en $\langle \text{antwoord} \rangle$ ofwel "ja" ofwel "neen". In de geluidshinderstudie plaatste elke proefpersoon voor elke term A_m een streepje op punt x_m op het lijnstuk van 10cm. Dit komt overeen met één koppel

$$(x_m, \text{ja})$$

voor de term A_m (vermits we op dit moment geïnteresseerd zijn in de 4 bovenstaande termen stellen we $m \in \{1, \dots, 4\}$). Voor de andere punten x in $[0, 10] \setminus \{x_m\}$ geeft de geluidshinderstudie geen informatie over het tweede element van het koppel $(x, \langle \text{antwoord} \rangle)$. We kunnen echter enkele intuïtief te verantwoorden veronderstellingen maken over wat het antwoord zou kunnen geweest zijn. Eén type van veronderstelling geeft daarbij aanleiding tot de inclusieve interpretatie, terwijl een andere aanname tot de niet-inclusieve interpretatie leidt.

Inclusieve interpretatie. We nemen een term A_m onder de loep, waarbij weer $m \in \{1, \dots, 4\}$. Veronderstel dat de proefpersoon door het plaatsen van een streepje op punt x_m bedoelde dat hij vond dat men *vanaf dat punt van geluidshinder* kan beginnen spreken over A_m . Dan zou hij m.a.w. voor alle x kleiner dan x_m "neen" geantwoord hebben, en voor alle x groter dan x_m "ja". Het berekenen van het gemiddeld aantal "ja"-antwoorden voor elk punt x genomen over alle proefpersonen komt dan neer op het construeren van de cumulatieve distributiefunctie. Het resultaat wordt weergegeven in Figuur 3.6. Het is jammer dat de proefpersonen bij de geluidshinderstudie niet bevraagd werden over

de betekenis van de atomaire term *gehinderd* zelf. We verwachten echter dat deze term zou kunnen voorgesteld worden door een vaagverzameling met een stijgende lidmaatschapsfunctie, gelegen “tussen” de lidmaatschapsfuncties van tamelijk gehinderd en zeer gehinderd.

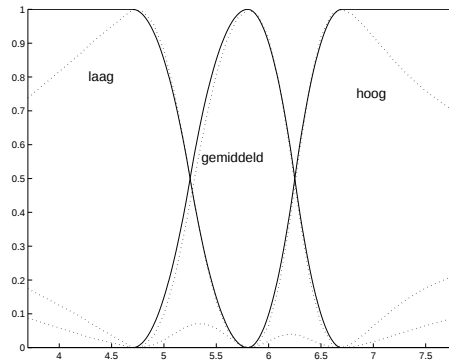
Niet-inclusieve interpretatie. Een andere mogelijkheid is dat de proefpersoon met zijn streepje op x_m wilde aangeven: “dit geluidshinderniveau noem ik A_m , maar de andere niet”. Hij zou m.a.w. enkel “ja” antwoorden voor x_m . Het berekenen van het gemiddeld aantal “ja”-antwoorden voor elk punt x genomen over alle proefpersonen komt dan neer op het construeren van de probabiliteitsdistributie. Na normalisatie bekomen we de lidmaatschapsfunctie in Figuur 3.6b).

Datagedreven methode

De datagedreven methode bij uitstek voor het genereren van lidmaatschapsfuncties is clusteren. Het doel van L -vaagclusteralgoritmes is het verdelen van een scherpe verzameling van objecten in een aantal L -vaagverzamelingen (de zgn. clusters) zo dat objecten die in grote mate tot dezelfde cluster behoren (d.w.z. hun lidmaatschapsgraad in die cluster is dicht bij 1) zo gelijkend mogelijk zijn, en zo dat objecten die tot verschillende clusters behoren (d.w.z. als de lidmaatschapsgraad van het ene object in een bepaalde cluster dicht bij 1 is, dan is de lidmaatschapsgraad van het andere object in diezelfde cluster dicht bij 0) zo verschillend mogelijk zijn. De linguïstisch vage noties “gelijkend” en “verschillend” worden daarbij opgevat als L -vaagrelaties op het universum van de te clusteren objecten. Zij worden meestal in verband gebracht met een afstandsfunctie. Afhankelijk van de aard van de objecten die men in clusters wenst te verdelen kan het b.v. gaan om een Euclidische metriek, om een Hamming-afstand, om een edit-afstand, enz. In een volgend hoofdstuk komen we nog terug op het duale verband tussen afstand en benaderende gelijkheid.

Eens er een goede L -vaagrelatie voor het modelleren van benaderende gelijkheid in een universum ter beschikking is, kan men m.b.v. L -vaagclusteralgoritmes volledige lidmaatschapsfuncties bekomen, onafhankelijk van de aard van het universum. In dat opzicht is deze datagedreven methode dus krachtiger dan een kennisgedreven methode waarbij men zich na het houden van een enquête beroept op interpolatietechnieken of typische lidmaatschapsfuncties die een specifiek soort van universum vereisen. Langs de andere kant zijn de resulterende clusters niet noodzakelijk goed interpreteerbaar als L -vaagverzamelingen die deze of gene linguïstische term representeren. Combinatie met een kennisgedreven methode, b.v. door een expert het resultaat van het clusterproces te laten beoordelen, kan in dit geval soelaas bieden.

Figuur 3.7 toont lidmaatschapsfuncties voor de atomaire termen *hoog*, *laag* en *gemiddeld* van de linguïstische veranderlijke “ziekterpercentage”. Voor het genereren van de lidmaatschapsfuncties in stippellijn hebben we gebruik gemaakt van de ziektepercentages (d.w.z. het percentage werknemers dat ziek is) van



Figuur 3.7: Lidmaatschapsfuncties voor linguïstische termen die het ziektepercentage beschrijven

alle afdelingen van de Nederlandse post van 1994 tot 1996. Deze cijfers werden geclusterd m.b.v. de “Fuzzy Identification Toolbox for Matlab” bij [1]. De resulterende lidmaatschapsfuncties werden vervolgens benaderd door typische lidmaatschapsfuncties (afgebeeld in volle lijn in Figuur 3.7). In de volgende hoofdstukken gaan we ontdekken hoe op basis van de lidmaatschapsfuncties uit Figuur 3.7 lidmaatschapsfuncties voor de gewijzigde termen *tamelijk hoog*, *extreem laag*, enz. kunnen geconstrueerd worden.

Hoofdstuk 4

Vaagwijzigers van de eerste generatie

Een hypothese
vormt een stimulans
om naar bepaalde eigenschappen
te zoeken of ze juist te verwaarlozen,
of zelfs te ontkennen.
(Umberto Eco)

In dit hoofdstuk bestuderen we zgn. opsplitsbare L -vaagwijzigers. Eerst gaan we allerlei eigenschappen van deze klasse van L -vaagwijzigers na. Vervolgens illustreren we aan de hand van specifieke voorbeelden hoe de bekende vaagwijzigers, voorgesteld in de begindagen van de vaagverzamelingenleer en tot op heden volop gebruikt voor de representatie van linguïstische wijzigers, resorteren onder deze klasse. Naar het einde van dit hoofdstuk toe wordt duidelijk dat deze vaagwijzigers van de eerste generatie ons niet bevredigen, niet alleen omdat ze zich niet zomaar laten veralgemenen tot L -vaagwijzigers, maar ook omdat ze semantische tekortkomingen hebben die ook optreden voor $L = [0, 1]$.

4.1 Uitbreidende en beperkende wijzigers

We vatten dit hoofdstuk aan met een paar algemene eigenschappen van beperkende en uitbreidende L -vaagwijzigers. Deze eigenschappen gelden zowel voor de klasse van opsplitsbare L -vaagwijzigers die we in dit hoofdstuk zullen behandelen, als voor de L -vaagwijzigers van de tweede generatie waarover we het in de volgende hoofdstukken zullen hebben.

4.1. Eigenschap (Interactie met beperkende L -vaagwijzigers). Zij L een begrensde tralie. Zij $\mathcal{T}$ een t-norm, $\mathcal{S}$ een t-conorm en $\mathcal{N}$ een negator op L . Als m een beperkende L -vaagwijziger is op X dan geldt voor alle A en B in $\mathcal{F}_L(X)$:

- (1) $m(A) \cap_{\mathcal{T}} m(B) \subseteq A \cap_{\mathcal{T}} B$
- (2) $m(A) \cup_{\mathcal{S}} m(B) \subseteq A \cup_{\mathcal{S}} B$
- (3) $m(\text{co}_{\mathcal{N}}(A)) \subseteq \text{co}_{\mathcal{N}}(m(A))$

Bewijs. De bewijzen van de inclusies in Eigenschap 4.1 gaan alle terug op Definitie 3.5 en de monotoniteit van de betrokken operator op L . Als voorbeeld bewijzen we (3). Voor alle x in X geldt wegens het beperkend zijn van m

$$m(A)(x) \leq A(x)$$

Wegens het dalend zijn van $\mathcal{N}$ volgt hieruit

$$\mathcal{N}(m(A)(x)) \geq \mathcal{N}(A(x)) \quad (4.1)$$

Uit het beperkend zijn van m volgt bovendien

$$m(\mathcal{N}(A(x))) \leq \mathcal{N}(A(x)) \quad (4.2)$$

Combinatie van (4.1) en (4.2) leidt tot het gestelde. $\square$

4.2. Eigenschap (Interactie met uitbreidende L -vaagwijzigers). Zij L een begrensde tralie. Zij $\mathcal{T}$ een t-norm, $\mathcal{S}$ een t-conorm en $\mathcal{N}$ een negator op L . Als m een uitbreidende L -vaagwijziger is op X dan geldt voor alle A en B in $\mathcal{F}_L(X)$:

- (1) $A \cap_{\mathcal{T}} B \subseteq m(A) \cap_{\mathcal{T}} m(B)$
- (2) $A \cup_{\mathcal{S}} B \subseteq m(A) \cup_{\mathcal{S}} m(B)$
- (3) $\text{co}_{\mathcal{N}}(m(A)) \subseteq m(\text{co}_{\mathcal{N}}(A))$

Bewijs. Analooog als Eigenschap 4.1.

4.2 Opsplitsbare wijzigers

4.3. Definitie (Opsplitsbaarheid, voorwijziger, nawijziger). (naar [77]) Zij m een L -vaagwijziger op een universum X . Indien er een $X - X$ afbeelding t en een $L - L$ afbeelding r bestaan zo dat voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$ geldt

$$m(A) = r \circ A \circ t$$

dan zeggen we dat m opsplitsbaar is in r en t . In dat geval noemen we t en r respectievelijk de voorwijziger en de nawijziger van m .

4.4. Definitie (Zuivere voor- en nawijziging). Zij m een L -vaagwijziger op X , t een $X - X$ afbeelding en r een $L - L$ afbeelding. Indien m opsplitsbaar is in $\mathbb{I}_L$ en t dan noemen we m een vaagwijziger met zuivere voorwijziging. Indien m opsplitsbaar is in r en $\mathbb{I}_X$ dan noemen we m een vaagwijziger met zuivere nawijziging.

Indien een L -vaagwijziger m op X tegelijk een vaagwijziger met zuivere voor- en nawijziging is, dan kan m niets anders zijn dan $\mathbb{I}_{\mathcal{F}_L(X)}$. Voor L -vaagwijzigers met zuivere nawijziging kunnen we onder bepaalde voorwaarden een sterkere versie van de eigenschappen uit 4.1 uit de brand slepen, zoals duidelijk wordt in de volgende twee eigenschappen.

4.5. Eigenschap. Zij L een ketting. Zij m een L -vaagwijziger met zuivere nawijziging en zij r de nawijziger van m . Als r stijgend is, dan geldt voor alle A en B in $\mathcal{F}_L(X)$:

- (1) $m(A \cup B) = m(A) \cup m(B)$
- (2) $m(A \cap B) = m(A) \cap m(B)$

Bewijs. Gevolg van Lemma 2.18 en de monotoniciteit van de betrokken operator op L .

4.6. Eigenschap. Zij L een ketting. Zij m een L -vaagwijziger met zuivere nawijziging en zij r de nawijziger van m . Als r dalend is, dan geldt voor alle A en B in $\mathcal{F}_L(X)$:

- (1) $m(A \cup B) = m(A) \cap m(B)$
- (2) $m(A \cap B) = m(A) \cup m(B)$

Bewijs. Analoog als Eigenschap 4.5.

Voor L -vaagwijzigers met zuivere voorwijziging kunnen gelijkheden bekomen worden onder zwakkere voorwaarden zoals blijkt uit de volgende eigenschap.

4.7. Eigenschap. Zij L een begrensde tralie. Zij $\mathcal{T}$ een t-norm, $\mathcal{S}$ een t-conorm en $\mathcal{N}$ een negator op L . Als m een L -vaagwijziger met zuivere voorwijziging is, dan geldt voor alle A en B in $\mathcal{F}_L(X)$:

- (1) $m(A \cap_{\mathcal{T}} B) = m(A) \cap_{\mathcal{T}} m(B)$
- (2) $m(A \cup_{\mathcal{S}} B) = m(A) \cup_{\mathcal{S}} m(B)$
- (3) $m(\text{co}_{\mathcal{N}}(A)) = \text{co}_{\mathcal{N}}(m(A))$
- (4) $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \subseteq m(B)$

Bewijs. Het bewijs berust op de definitie van L -vaagwijziger met zuivere voorwijziging. Als voorbeeld bewijzen wij (1) en (4). Noem t de voorwijziger van m . Voor alle x in X geldt dan

$$\begin{aligned} m(A \cap_{\mathcal{T}} B)(x) &= (A \cap_{\mathcal{T}} B)(t(x)) \\ &= \mathcal{T}(A(t(x)), B(t(x))) \\ &= \mathcal{T}(m(A)(x), m(B)(x)) \\ &= (m(A) \cap_{\mathcal{T}} m(B))(x) \end{aligned}$$

Uit $A \subseteq B$ volgt $A(x) \leq B(x)$ voor alle x in X . We hebben dan m.a.w. ook $A(t(x)) \leq B(t(x))$ voor alle x in X , en dus $m(A) \subseteq m(B)$. □

Uit punt (4) van Eigenschap 4.7 weten wij dat L -vaagwijzigers met zuivere voorwijziging altijd stijgend zijn. Voor L -vaagwijzigers met zuivere nawijziging gaat dat niet op: hun monotoniciteitsgedrag hangt samen met dat van hun nawijziger zoals de volgende eigenschap aangeeft.

4.8. Eigenschap. Zij m een L -vaagwijziger met zuivere nawijziging en zij r de nawijziger van m . Dan geldt voor alle A en B in $\mathcal{F}_L(X)$:

- (1) als r stijgend is dan: $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \subseteq m(B)$
- (2) als r dalend is dan: $A \subseteq B \Rightarrow m(B) \subseteq m(A)$

Bewijs. Zij $A \subseteq B$. Voor alle x in X geldt dan $A(x) \leq B(x)$. Indien r stijgend is volgt hieruit $r(A(x)) \leq r(B(x))$ en dus $m(A) \subseteq m(B)$. Het bewijs van (2) verloopt analoog. □

4.9. Definitie (Behoud van kern, behoud van drager). Zij L een begrensde tralie. Stel m een L -vaagwijziger op X . Wanneer voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$ geldt dat $\ker(A) = \ker(m(A))$, dan zegt men dat m de kern behoudt. Wanneer voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$ geldt dat $\text{supp}(A) = \text{supp}(m(A))$, dan zegt men dat m de drager behoudt.

4.10. Eigenschap. Zij L een begrensde tralie. Zij m een L -vaagwijziger met zuivere nawijziging en zij r de nawijziger van m , dan zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig:

- (1) m behoudt de kern
- (2) 1 is een blokkerend punt van r

Bewijs. Voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$ en voor alle x in X geldt:

$$\begin{aligned} x \in \ker(A) &\Leftrightarrow A(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow r(A(x)) = 1 \\ &\Leftrightarrow m(A)(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(m(A)) \end{aligned}$$

□

4.11. Eigenschap. Zij L een begrensde tralie. Zij m een L -vaagwijziger met zuivere nawijziging en zij r de nawijziger van m , dan zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig:

- (1) m behoudt de drager
- (2) 0 is een blokkerend punt van r

Bewijs. Analoog als de voorgaande eigenschap.

4.3 Voorbeelden

De definitie van L -vaagwijziger legt geen enkele andere beperking op aan r en t dan dat het respectievelijk een L - L en een X - X afbeelding moeten zijn. Het mag ons dan ook niet verwonderen dat wij in de literatuur een uitgebreid gamma van kandidaatafbeeldingen aantreffen die allemaal wel ergens nuttig voor zijn. Twee zaken vallen daarbij onmiddellijk op: enerzijds is in zowat alle gevallen $L = [0, 1]$ en ligt een uitbreiding naar L niet voor de hand. Anderzijds lijkt iedereen wat betreft voorwizigers zijn toevlucht te zoeken tot een numeriek universum, bij voorkeur (een geschikte deelverzameling van) $\mathbb{R}$.

Het is niet onze bedoeling hier een gedetailleerde studie weer te geven van alle bestaande opsplitsbare L -vaagwizigers die hier of daar gebruikt worden voor de representatie van linguïstische wizigers, en wel omdat alle vaagwizigers van deze klasse toch behept zijn met belangrijke tekortkomingen. Wel zullen we na een kort overzicht in deze sectie de twee bekendste soorten (nl. de verheffende wizigers en de verschuivende wizigers) bij wijze van voorbeeld in de volgende secties volledig doorlichten.

Complementering. Zij $\mathcal{N}$ een negator op L , dan kan $co_{\mathcal{N}}$ beschouwd worden als een L -vaagwijziger met zuivere nawijziging waarvan $\mathcal{N}$ de nawijziger is. Zoals we reeds in Hoofdstuk 3 aanhaalden wordt complementering vaak gebruikt als representatie voor niet. Sommige auteurs zien niet als een linguïstische wijziger [10], maar we gaan in dit werk niet in detail in op de representatie van ontkenning.

Stuksgewijs lineaire wizigers. In [15] werd een stuksgewijs lineaire voorwiziger r_{α} geïntroduceerd, afhankelijk van een parameter α in $]0, 1[$, gedefinieerd als

$$r_{\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\alpha}x, & \text{als } x \in [0, \alpha] \\ \frac{\alpha}{1-\alpha}(x-1) + 1, & \text{als } x \in [\alpha, 1] \end{cases}$$

voor alle x in $[0, 1]$. Men gaat eenvoudig na dat de resulterende vaagwijziger met zuivere nawijziging uitbreidend is voor $\alpha \leq 0.5$ en beperkend voor $\alpha \geq 0.5$. Bovendien zijn 0 en 1 blokkerende punten van r_{α} zodat de resulterende vaagwijziger de kern en de drager behoudt. Als $x \in [0, \alpha]$ dan geldt immers $r_{\alpha}(x) \leq 1 - \alpha < 1$. Er geldt dus voor alle x in $[0, 1]$

$$\begin{aligned} r_{\alpha}(x) = 1 & \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha}(x-1) + 1 = 1 \\ & \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

waaruit we besluiten dat 1 een blokkerend punt van r_{α} is. Anderzijds als $x \in [\alpha, 1]$ dan is $r_{\alpha}(x) \geq 1 - \alpha > 0$. Er geldt dus voor alle x in $[0, 1]$

$$\begin{aligned} r_{\alpha}(x) = 0 & \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha}x = 0 \\ & \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

waaruit we besluiten dat 0 een blokkerend punt van r_{α} is.

Verheffende vaagwijzigers. De bekendste klasse van vaagwijzigers, oorspronkelijk voorgesteld door Zadeh [104], zijn vaagwijzigers met zuivere nawijziging waarvan de nawijziger gegeven wordt door $\cdot^\alpha$ (met α in $[0, +\infty[$). Hellingendoorn [50] noemde deze klasse later “verheven wijzigers” (*powered hedges*). Omdat de wijzigers eerder het onderwerp dan het voorwerp van de machtsverheffing zijn, verkiezen we om het te hebben over “verheffende wijzigers”. We bespreken deze klasse in detail in Sectie 4.4.

Vaagwijzigers van Rhodes-Menani. Rhodes en Menani introduceerden een variant op de verheffende vaagwijzigers [88]. Zij gebruiken daarbij als nawijziger r_α gedefinieerd als $r_\alpha(x) = 1 - (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, voor alle x in $[0, 1]$ waarbij $\alpha \in]0, +\infty[$. Men kan nagaan dat de resulterende vaagwijziger met zuivere nawijziging uitbreidend is voor $\alpha \leq 1$ en beperkend voor $\alpha \geq 1$. 0 en 1 zijn ook van deze navervager blokkerende punten, zodat er ook nu weer behoud van kern en van drager is. Voor alle x in $[0, 1]$ geldt immers

$$\begin{aligned} r_\alpha(x) = 1 &\Leftrightarrow 1 - (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 \\ &\Leftrightarrow (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - x^\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

waarbij de laatste stap verantwoord is wegens $x \geq 0$. We besluiten hieruit dat 1 een blokkerend punt van r_α is. Men kan volkomen analoog aantonen dat 0 een blokkerend punt van r_α is.

Contrastintensificatie. Naast uitbreidende vaagwijzigers (die de lidmaatschapsgraden naar boven duwen) en beperkende vaagwijzigers (die de lidmaatschapsgraden naar beneden halen) beschouwt men soms ook contrastintensifiërende vaagwijzigers. Deze vaagwijzigers verhogen de hogere lidmaatschapsgraden, terwijl ze de lagere nog meer verlagen. De resulterende vaagverzameling zal dan a.h.w. minder vaag zijn dan de originele. Ragade en Gupta [87] voerden hiervoor een vaagwijziger met zuivere nawijziging in, bepaald door de nawijziger

$$r(x) = \begin{cases} x^2, & \text{als } x < 0.5 \\ \sqrt{x}, & \text{als } x \geq 0.5 \end{cases}$$

voor alle x in $[0, 1]$. Deze nawijziger is niet continu in 0.5. Een andere nawijziger die aanleiding geeft tot een contrastintensifiërende vaagwijziger werd voorgesteld door Zadeh [104] en kan geschreven worden als $S(\cdot; 0, 1)$ (zie [58]). We verwijzen naar [58] voor een gedetailleerde studie van de contrastintensifiërende vaagwijzigers van Ragade en Gupta, en van Zadeh. Men ziet eenvoudig in dat de corresponderende nawijzigers weerom 0 en 1 als blokkerende punten hebben, waardoor de vaagwijzigers drager en kern behouden. Zoals later duidelijk zal worden, is dit niet steeds wenselijk. Als veralgemening van het voorstel van Zadeh, definiëren we daarom de contrastintensificator CINT_α , afhankelijk van een parameter α in $[0, 0.5]$, als de vaagwijziger met zuivere nawijziging bepaald

door de nawijziger $S(., \alpha, 1 - \alpha)$. Alle lidmaatschapsgraden kleiner dan of gelijk aan α worden door CINT_α op 0 geduwd, terwijl alle lidmaatschapsgraden groter dan of gelijk aan $1 - \alpha$ tot 1 worden opgetild. Toepassen van CINT_α geeft dus normaal gezien aanleiding tot een verruiming van kern en drager.

Vaagwijzigers van Kuz'min. Voor het universum $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ stelde Kuz'min [68] de voorwijziger $t_{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}$ voor, bepaald door 4 reële parameters α, β, γ en δ zo dat $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, en gedefinieerd als

$$t_{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, & \text{als } x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\delta}{\gamma}\} \\ +\infty, & \text{als } x = -\frac{\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha}{\gamma}, & \text{als } x = +\infty \end{cases}$$

voor alle x in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Indien $\gamma = 0$ en $\delta = 1$ dan kan de voorwijziger van Kuz'min teruggebracht worden tot een eenvoudige, lineaire voorwijziger voor vaagverzamelingen in $\mathbb{R}$, nl.

$$t_{(\alpha, \beta, 0, 1)}(x) = \alpha x + \beta$$

voor alle x in $\mathbb{R}$. Een volgende vereenvoudiging bestaat er in ook voor α als waarde 1 te kiezen. Zo ontstaan de verschuivende vaagwijzigers die we in detail zullen bekijken in Sectie 4.5.

Vaagwijzigers van Köhler Hierboven hebben we reeds allerlei voorbeelden geven van nawijzigers. In principe kunnen al deze afbeeldingen a.h.w. gerecycleerd worden als voorwijzigers. Köhler [64] stelt hiertoe voor om vaagverzamelingen in $\mathbb{R}$ eerst te herschalen naar $[0, 1]$, er vervolgens een $[0, 1]$ - $[0, 1]$ afbeelding op los te laten, en het resultaat terug “uit te rekken” naar $\mathbb{R}$. De samengestelde van de schalingsfunctie, de $[0, 1]$ - $[0, 1]$ afbeelding en de uitrekfunctie kan dan beschouwd worden als een voorwijziger. In [16] wordt iets analoogs gedaan.

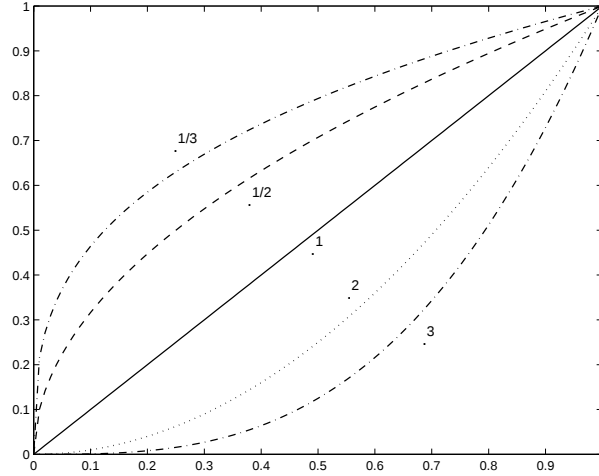
4.4 Verheffende vaagwijzigers

4.12. Definitie (Verheffende vaagwijziger). [104] Een vaagwijziger in X die opsplitsbaar is in $.\alpha$ (met α in $[0, +\infty[$) en $\mathbb{I}_X$ wordt een verheffende vaagwijziger genoemd.

In dit werk zullen we dergelijke verheffende vaagwijzigers symbolisch noteren als P_α . Voor iedere A in $\mathcal{F}(X)$ en x in X geldt dus

$$P_\alpha(A)(x) = (A(x))^\alpha$$

Enkele van de nawijzigers zijn afgebeeld in Figuur 4.1. Hoewel ze op semantisch vlak bekende tekortkomingen hebben (zie verder) behoren deze vaagwijzigers omwille van hun ruime toepasbaarheid en computationele eenvoud nog steeds tot de populairste. In de volgende eigenschap zetten we interessante eigenschappen van verheffende vaagwijzigers op een rijtje, wat aanleiding geeft tot



Figuur 4.1: Nawijzigers van de verheffende vaagwijzigers

een veralgemening van de lijst met eigenschappen die in [58] geformuleerd zijn voor P_2 , $P_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{T}_M$, $\mathcal{S}_M$ en $\mathcal{N}_s$.

4.13. Eigenschap. Voor $\mathcal{T}$ een t-norm, $\mathcal{S}$ een t-conorm, $\mathcal{N}$ een negator, A en B in $\mathcal{F}(X)$ en α in $[0, +\infty[$ gelden:

- (P1) Uitbreiding en beperking
 Als $\alpha \leq 1$ dan $A \subseteq P_\alpha(A)$
 Als $\alpha \geq 1$ dan $P_\alpha(A) \subseteq A$
- (P2) Interactie met $\mathcal{T}$ -doorsnede
 Als $\alpha \leq 1$ dan $A \cap_{\mathcal{T}} B \subseteq P_\alpha(A) \cap_{\mathcal{T}} P_\alpha(B)$
 Als $\alpha \geq 1$ dan $P_\alpha(A) \cap_{\mathcal{T}} P_\alpha(B) \subseteq A \cap_{\mathcal{T}} B$
- (P2') Interactie met Zadeh-doorsnede
 $P_\alpha(A \cap B) = P_\alpha(A) \cap P_\alpha(B)$
- (P2'') Interactie met product-doorsnede
 $P_\alpha(A \cap_{\mathcal{T}_P} B) = P_\alpha(A) \cap_{\mathcal{T}_P} P_\alpha(B)$
- (P3) Interactie met $\mathcal{S}$ -unie
 Als $\alpha \leq 1$ dan $A \cup_{\mathcal{S}} B \subseteq P_\alpha(A) \cup_{\mathcal{S}} P_\alpha(B)$
 Als $\alpha \geq 1$ dan $P_\alpha(A) \cup_{\mathcal{S}} P_\alpha(B) \subseteq A \cup_{\mathcal{S}} B$
- (P3') Interactie met Zadeh-unie
 $P_\alpha(A \cup B) = P_\alpha(A) \cup P_\alpha(B)$
- (P4) Interactie met $\mathcal{N}$ -complement
 Als $\alpha \leq 1$ dan $co_{\mathcal{N}}(P_\alpha(A)) \subseteq P_\alpha(co_{\mathcal{N}}(A))$
 Als $\alpha \geq 1$ dan $P_\alpha(co_{\mathcal{N}}(A)) \subseteq co_{\mathcal{N}}(P_\alpha(A))$
- (P5) Monotonieit
 Als $A \subseteq B$ dan $P_\alpha(A) \subseteq P_\alpha(B)$
- (P6) Effect op het universum

- $P_\alpha(X) = X$
(P7) Effect op de lege verzameling
 $P_\alpha(\emptyset) = \emptyset$
(P8) Gedrag m.b.t. de kern
 $\ker(P_\alpha(A)) = \ker(A)$
(P9) Gedrag m.b.t. de drager
 $\text{supp}(P_\alpha(A)) = \text{supp}(A)$
(P10) Onderlinge interactie
 Als $\alpha \neq 0$ dan $(P_\alpha(P_{\frac{1}{\alpha}}(A))) = A$

Bewijs. (P1) volgt uit het gedrag in $[0, 1]$ van de machtsfuncties met positieve reële exponent (zie ook Figuur 4.1). (P2), (P3) en (P4) volgen uit Eigenschap 4.1 en 4.2, terwijl (P2') en (P3') een gevolg zijn van Eigenschap 4.5. (P2'') is op gebied van interactie met doorsnede een vreemde eend in de bijt die kan toegeschreven worden aan de wiskundige rekenregel $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$. (P5) volgt uit Eigenschap 4.8. (P6) en (P7) zijn het gevolg van $0^\alpha = 0$ en $1^\alpha = 1$, voor alle α in $[0, +\infty[$. (P8) en (P9) vloeien voort uit Eigenschap 4.10 en 4.11. (P10) ten slotte is een gevolg van de rekenregel $(x^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = x$. $\square$

Zoals uit volgende voorbeelden blijkt, kan er geen algemene eigenschap (in termen van inclusie of gelijkheid) omtrent interactie van verheffende vaagwijzigers met willekeurige $\mathcal{T}$ -doorsnede en $\mathcal{S}$ -unie geformuleerd worden. We maken in de voorbeelden gebruik van de triangulaire norm $\mathcal{T}_{\frac{3}{2}, \frac{1}{4}}$ zoals gedefinieerd in Voorbeeld 2.30(2). Voor de gelegenheid zullen we deze t-norm kortweg als $\mathcal{T}_D$ noteren, en de duale t-conorm t.o.v. $\mathcal{N}_s$ als $\mathcal{S}_D$.

4.14. Voorbeeld. Zij $A(x) = 0.9 = B(x)$ voor alle x in X , dan is voor alle x in X $\mathcal{T}_D(A(x), B(x))^2 = \mathcal{T}_D(0.9, 0.9)^2 = \frac{1}{4}^2$ en $\mathcal{T}_D(A(x)^2, B(x)^2) = \mathcal{T}_D(0.81, 0.81) = \frac{1}{4}$, waaruit blijkt dat

$$P_2(A \cap_{\mathcal{T}_D} B) \subset P_2(A) \cap_{\mathcal{T}_D} P_2(B)$$

4.15. Voorbeeld. Zij $A(x) = 0.8 = B(x)$ voor alle x in X , dan is voor alle x in X $\mathcal{T}_D(A(x), B(x))^2 = \mathcal{T}_D(0.8, 0.8)^2 = \frac{1}{4}^2$ en $\mathcal{T}_D(A(x)^2, B(x)^2) = \mathcal{T}_D(0.64, 0.64) = 0$, waaruit blijkt dat

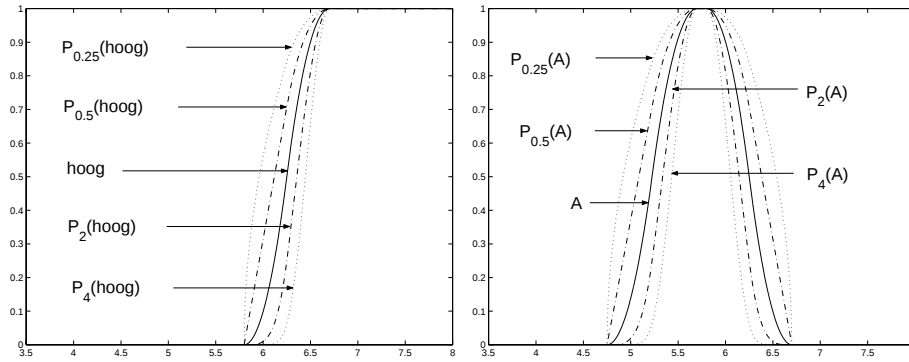
$$P_2(A) \cap_{\mathcal{T}_D} P_2(B) \subset P_2(A \cap_{\mathcal{T}_D} B)$$

4.16. Voorbeeld. Zij $A(x) = 0.1 = B(x)$ voor alle x in X , dan is voor alle x in X $\mathcal{S}_D(A(x), B(x))^2 = (1 - \mathcal{T}_D(0.9, 0.9))^2 = \frac{3}{4}^2$ en $\mathcal{S}_D(A(x)^2, B(x)^2) = 1 - \mathcal{T}_D(0.99, 0.99) = \frac{3}{4}$, waaruit blijkt dat

$$P_2(A \cup_{\mathcal{S}_D} B) \subset P_2(A) \cup_{\mathcal{S}_D} P_2(B)$$

4.17. Voorbeeld. Zij $A(x) = 0.3 = B(x)$ voor alle x in X , dan is voor alle x in X $\mathcal{S}_D(A(x), B(x))^2 = (1 - \mathcal{T}_D(0.7, 0.7))^2 = 1$ en $\mathcal{S}_D(A(x)^2, B(x)^2) = 1 - \mathcal{T}_D(0.91, 0.91) = \frac{3}{4}$, waaruit blijkt dat

$$P_2(A) \cup_{\mathcal{S}_D} P_2(B) \subset P_2(A \cup_{\mathcal{S}_D} B)$$



Figuur 4.2: Verheffende vaagwijzigers toegepast a) op hoog en b) op A =gemiddeld

Uit (P.1) van Eigenschap 4.13 blijkt dat voor $\alpha \geq 1$ de verheffende wijzigers beperkend zijn, terwijl ze voor $\alpha \leq 1$ uitbreidend zijn. De reductie, respectievelijk verhoging, van de lidmaatschapsgraden is relatief klein in punten die een zeer hoge of een zeer lage lidmaatschapsgraad hebben, en relatief groot in punten met een intermediaire lidmaatschapsgraad (in de omgeving van 0.5). In de elementen van de kern en de drager verandert de lidmaatschapsgraad zelfs helemaal niet omdat 0 en 1 blokkerende punten zijn van de machtsfuncties $.\alpha$.

De beperkende en uitbreidende verheffende vaagwijzigers worden gebruikt voor de representatie van respectievelijk versterkende en verzwakkende linguïstische wijzigers in de inclusieve interpretatie. De grootte van de parameter α bepaalt daarbij de sterkte van de wijziging. Zo kan men **zeer** modelleren door P_2 (dikwijls de concentratie-operator genoemd) en **tamelijk** door $P_{0.5}$ (de dilatatie-operator). Wanneer men daarenboven **extreem** voorstelt door b.v. P_4 en een **beetje** door $P_{0.25}$, bekomt men representaties die volledig voldoen aan (3.2). Figuur 4.2 illustreert de toepassing van deze vaagwijzigers op de lidmaatschapsfuncties voor **hoog** en **gemiddeld** in het universum van ziektepercentages.

De eigenschappen uit Eigenschap 4.13 krijgen in dit representationeel kader een specifieke betekenis. Wanneer men de $\mathcal{T}$ doorsnede beschouwt als een modellering voor **en**, de $\mathcal{S}$ -unie als een modellering voor **of**, en het $\mathcal{N}$ -complement als een representatie voor **niet**, dan drukken ze o.m. allerlei verbanden uit tussen uitdrukkingen zoals **zeer** (mooi of slim) en **zeer mooi** of **zeer slim**, zoals **tamelijk** (lekker en goedkoop) en **tamelijk lekker** en **tamelijk goedkoop**, en zoals **zeer onjuist** en **niet tamelijk juist**.

Hoewel de meeste auteurs de concentratiebewerking als een vrij goede benadering van de intuïtieve betekenis van **zeer** ervaren, zien zij toch dikwijls het behoud van kern en drager als een bezwaar (zie b.v. [50], [58], [69]). Ten gevolge hiervan kan in deze representatie immers geen onderscheid gemaakt worden tussen b.v. percentages die **hoog** zijn in de mate 1 en percentages die **zeer hoog** zijn

in de mate 1, hoewel een bedrijfsarts een percentage van 6.5 als hoog in de mate 1 zou kunnen beschouwen, maar **zeer hoog** enkel in een lagere mate, b.v. 0.7. Een analoge redenering kan gemaakt worden voor de andere linguïstische wijzigers: in de representatie met verheffende wijzigers kan b.v. geen onderscheid gemaakt worden tussen de restaurants die **duur** zijn in de mate 0 en de restaurants die **tamelijk duur** zijn in de mate 0, terwijl we intuïtief wel deze mogelijkheid verwachten. Men ziet gemakkelijk in dat alle L -vaagwizigers met pure nawijziging in hetzelfde bed ziek zijn (zie Eigenschap 4.10 en 4.11).

Zadeh [104] wijst deze discrepantie tussen intuïtie en wiskundige representatie zelf gedeeltelijk aan. Hij legt uit dat iedere beperkende wijziger m die voldoet aan de volgende twee eigenschappen

$$(Z.1) \quad m(A \cup B) = m(A) \cup m(B), \text{ voor alle } A \text{ en } B \text{ in } \mathcal{F}(X)$$

$$(Z.2) \quad m(A) = A, \text{ voor alle } A \text{ in } \mathcal{P}(X)$$

de kern behoudt. Inderdaad, voor alle A in $\mathcal{F}(X)$ geldt $A = A \cup \ker A$, en dus in de onderstelling dat eigenschap (Z.1) geldt, $m(A) = m(A) \cup m(\ker A)$. In de onderstelling dat eigenschap (Z.2) geldt, volgt hieruit $\ker A \subseteq m(A)$ en dus

$$\ker A \subseteq \ker(m(A)) \quad (4.3)$$

Anderzijds volgt uit het beperkend zijn van m dat

$$\ker(m(A)) \subseteq \ker A \quad (4.4)$$

Uit (4.3) en (4.4) volgt dat m inderdaad de kern behoudt. Het is nu natuurlijk nog de vraag of (Z.1) en (Z.2) steeds moeten gelden. Het antwoord op die vraag is volgens ons negatief. (Z.2) drukt uit dat de beperkende wijziger m geen effect heeft op scherpe concepten (d.w.z. elementen van $\mathcal{P}(X)$). Zadeh [104] vermeldt echter zelf: “*the operand of very must be a term with a fuzzy meaning*”, wat (Z.2) in zekere zin overbodig maakt. Belangrijker is echter dat (Z.1) uitdrukt dat b.v. **zeer** (A of B) hetzelfde zou moeten betekenen als **zeer** A of **zeer** B . Wanneer echter van een bedrijf gezegd wordt dat een juffrouw er carrière kan maken als ze **zeer mooi** of **zeer slim** is, dan is het voor ons duidelijk dat zowel een bloedmooie domme gans als een foeilelijk genie daar hogere kansen hebben dan een juffrouw die zowel wat betreft uiterlijk als intellect iets meer dan doorsnee begiftigd is. M.a.w. volgens ons geldt **zeer** $A \cup$ **zeer** $B \subseteq$ **zeer** $(A \cup B)$, maar dus niet noodzakelijk de gelijkheid.

We merken daarbij op dat de nadelige effecten van het behoud van kern en drager van de verheffende vaagwizigers ook doorsijpelen naar de andere lidmaatschapsgraden. Zoals uit Figuur 4.2 blijkt, hebben de verheffende vaagwizigers de neiging om de hellingen van de lidmaatschapsfuncties steiler te maken. Uit de experimenten van Hersh en Caramazza [51] bleek echter dat de helling van de lidmaatschapsfunctie van **zeer groot** ongeveer dezelfde was als die van **groot**. O.m. om die reden verkozen ze dan ook verschuivende vaagwizigers. Voor we in meer detail ingaan op deze soort, merken we eerst nog op dat de verheffende vaagwizigers niet bruikbaar zijn voor de niet-inclusieve interpretatie.

Bovendien is er, zelfs in de inclusieve interpretatie, geen vlotte veralgemening mogelijk naar verheffende L -vaagwijzigers, waarbij L een tralie is. De oorzaak hiervan is uiteraard het ontbreken van een voor de hand liggend concept van machtsfunctie op een willekeurige tralie.

4.5 Verschuivende vaagwijzigers

Een ander veel gebruikt type van vaagwijzigers werd quasi gelijktijdig met de verheffende wijzigers voorgesteld door Lakoff [69], zij het op een informele manier. O.a. Hellendoorn [50], Bouchon-Meunier [10] en Kerre [58] bestudeerden hen op een formelere manier. Hellendoorn bedacht hen bovendien met de naam “vershoven wijzigers” (*shifted hedges*). Omdat de wijzigers eerder het onderwerp dan het voorwerp zijn van de wijziging, verkiezen we de terminologie “verschuivende vaagwijzigers”.

4.18. Definitie. Een vaagwijziger in $\mathbb{R}$ die opsplitsbaar is in $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ en $T_{-\alpha}$ (met α in $\mathbb{R}$) wordt een verschuivende vaagwijziger genoemd.

We zullen dergelijke verschuivende vaagwijzigers symbolisch noteren als S_{α} . Voor iedere A in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ en x in X geldt dus

$$S_{\alpha}(A)(x) = A(x - \alpha)$$

Het is duidelijk dat de verschuivende vaagwijzigers, vaagwijzigers met zuivere voorwijziging zijn. Ze verschuiven de te wijzigen lidmaatschapsfunctie a.h.w. naar links of naar rechts. De grootte en de richting van de verschuiving wordt daarbij volledig bepaald door de parameter α . We zetten hierna enkele interessante eigenschappen op een rijtje (zie [58]).

4.19. Eigenschap. Voor $\mathcal{T}$ een t-norm, $\mathcal{S}$ een t-conorm, $\mathcal{N}$ een negator, A en B in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ gelden:

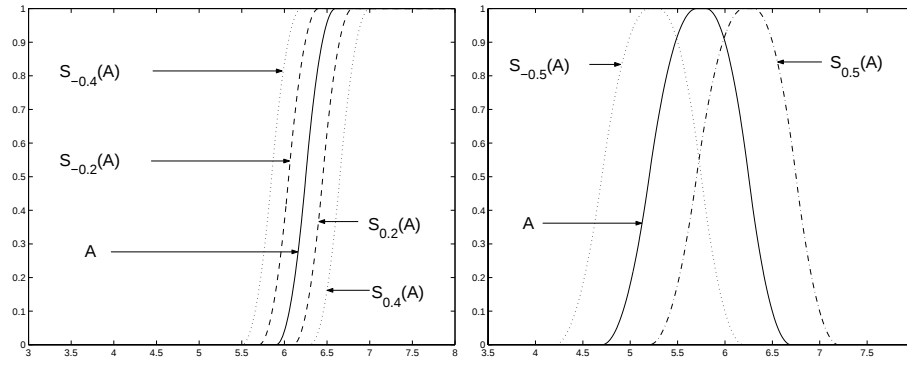
- (S1) Uitbreiding en beperking
 - Als A stijgend is en $\alpha \geq 0$ dan $S_{\alpha}(A) \subseteq A$
 - Als A dalend is en $\alpha \leq 0$ dan $S_{\alpha}(A) \subseteq A$
 - Als A stijgend is en $\alpha \leq 0$ dan $S_{\alpha}(A) \supseteq A$
 - Als A dalend is en $\alpha \geq 0$ dan $S_{\alpha}(A) \supseteq A$
- (S2) Interactie met $\mathcal{T}$ -doorsnede

$$S_{\alpha}(A \cap_{\mathcal{T}} B) = S_{\alpha}(A) \cap_{\mathcal{T}} S_{\alpha}(B)$$
- (S3) Interactie met $\mathcal{S}$ -unie

$$S_{\alpha}(A \cup_{\mathcal{S}} B) = S_{\alpha}(A) \cup_{\mathcal{S}} S_{\alpha}(B)$$
- (S4) Interactie met $\mathcal{N}$ -complement

$$co_{\mathcal{N}}(S_{\alpha}(A)) = S_{\alpha}(co_{\mathcal{N}}(A))$$
- (S5) Monotonieit
 - Als $A \subseteq B$ dan $S_{\alpha}(A) \subseteq S_{\alpha}(B)$
- (S6) Effect op het universum

$$S_{\alpha}(X) = X$$



Figuur 4.3: Verschuivende vaagwijzigers toegepast a) op $A=\text{hoog}$ en b) op $A=\text{gemiddeld}$

(S7) Effect op de lege verzameling

$$S_\alpha(\emptyset) = \emptyset$$

(S8) Gedrag m.b.t. de kern

$$\neg(\forall E \in \mathcal{F}(\mathbb{R}))(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\ker(S_\alpha(E)) = \ker(E))$$

(S9) Gedrag m.b.t. de drager

$$\neg(\forall E \in \mathcal{F}(\mathbb{R}))(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\text{supp}(S_\alpha(E)) = \text{supp}(E))$$

Bewijs. (S1) volgt uit het gedrag van A en de keuze van α . Als b.v. $\alpha \geq 0$ dan geldt voor alle x in $\mathbb{R}$ dat $x - \alpha \leq x$ en voor een stijgende A dus $S_\alpha(A)(x) \leq A(x)$. De andere inclusies uit (S1) kunnen op analoge manier aangetoond worden. (S2), (S3), (S4) en (S5) volgen onmiddellijk uit Eigenschap 4.7. (S6) t.e.m. (S9) kunnen eveneens makkelijk aangetoond worden.

□

(S6) en (S7) kunnen vlot veralgemeend worden, enerzijds voor alle L -vaagwijzigers met zuivere nawijziging, en anderzijds voor alle L -vaagverzamelingen A met constante lidmaatschapsfunctie (waarin alle elementen uit het universum dus dezelfde graad van lidmaatschap hebben). (S8) en (S9) drukken uit dat niet alle verschuivende wijzigers de kern en de drager van alle vaagverzamelingen in $\mathbb{R}$ behouden. Op semantisch vlak zijn ze dan ook geschikter om gewijzigde linguïstische termen in de inclusieve interpretatie te representeren. Tenminste, op voorwaarde dat de lidmaatschapsfuncties stijgend of dalend zijn, zodat het semantisch entailment gewaarborgd kan worden door Eigenschap 4.19 (S1). Figuur 4.3a illustreert hoe $S_{-0.4}(A)$, $S_{-0.2}(A)$, $S_{0.2}(A)$ en $S_{0.4}(A)$ kunnen gebruikt worden voor de representatie van respectievelijk een beetje hoog, tamelijk hoog, zeer hoog en extreem hoog, waarbij hoog uiteraard voorgesteld wordt door A . Uit Figuur 4.3b blijkt echter dat verschuivende vaagwijzigers niet geschikt zijn voor het zinvol wijzigen van π -functies in de inclusieve interpretatie. Een

truukje dat men in dit geval wel eens durft toepassen is het opsplitsen van de lidmaatschapsfunctie in verschillende delen, vervolgens elk van de delen in deze of gene richting verschuiven en tenslotte de verschoven delen op een of andere manier weer aan elkaar lijmen. Een dergelijke werkwijze is echter verre van elegant en gaat nog steeds uit van lidmaatschapsfuncties met een specifieke vorm. Men ziet eenvoudig in dat verschuivende vaagwijzigers daarentegen wel zeer bruikbaar zijn voor de niet-inclusieve interpretatie.

Verschuivende vaagwijzigers worden meestal gedefinieerd in $\mathbb{R}$ omdat ze, net zoals alle vaagwijzigers met voorwijziging, een bewerking t uitvoeren op het universum. Aangezien $\mathbb{R}$ uitgerust is met vele bekende bewerkingen, is het dan ook een populair kandidaatuniversum. In vele hedendaagse vaagcontrolesystemen is het universum een geschikte deelverzameling van $\mathbb{R}$. Het toelaten en bestuderen van niet-numerieke universa zou de deur kunnen openen naar een nu nog zo goed als maagdelijk terrein van toepassingen. We denken b.v. aan applicaties waar invoer en uitvoer gegeven worden door, of bedoeld zijn voor, een mens i.p.v. een meetinstrument of een machine. In dergelijke universa liggen geschikte bewerkingen echter niet altijd voor het rapen. Wanneer het universum b.v. onvergelykbare informatie bevat, dan kunnen verschuivende wijzigers al meteen geschrapt worden van de lijst van mogelijkheden. Deze wijzigers verwachten immers een totale ordening in het universum, want anders is het niet mogelijk om een verschuiving naar links of naar rechts uit te voeren.

4.6 Besluit

In de vorige twee secties hebben we verheffende en verschuivende vaagwijzigers bestudeerd als prototypes voor vaagwijzigers met zuivere nawijziging enerzijds, en vaagwijzigers met zuivere voorwijziging anderzijds. We zetten hun kenmerken op een rijtje:

Kenmerk	P_α	S_α
bruikbaar voor niet-inclusieve interpretatie	neen	ja
bruikbaar voor inclusieve interpretatie	ja	beperkt
bruikbaar voor willekeurige lidmaatschapsfuncties	ja	neen
geen behoud van drager en kern	neen	ja
bruikbaar in elk universum	ja	neen
uitbreidbaar naar L	neen	in theorie

Wat betreft semantiek schieten beide categorieën tekort in de inclusieve interpretatie: de verheffende omdat ze drager en kern behouden, de verschuivende omdat ze zo beperkt toepasbaar zijn (enkel voor bepaalde lidmaatschapsfuncties in bepaalde universa). In de niet-inclusieve interpretatie doen de verschuivende vaagwijzigers het niet slecht, maar ook hier geldt weer de beperktheid in keuze van het universum wegens de nood aan een verschuivingsbewerking. De verschuivende vaagwijzigers zijn in theorie veralgemeenbaar tot verschuivende L -vaagwijzigers omdat de actie zich toch in het universum afspeelt en dus niet op het niveau van de lidmaatschapsgraden. Het is echter nog maar de vraag of het

zinnig is af te wijken van $[0, 1]$ voor de lidmaatschapsgraden als het universum toch een ketting moet zijn om verschuivende wijzigers te kunnen gebruiken.

De verheffende vaagwijzigers zijn niet toepasbaar voor de niet-inclusieve interpretatie en ook niet veralgemeenbaar tot verheffende L -vaagwijzigers wegens het gebrek aan machtsfuncties op een willekeurige tralie L . Het behoeft niet gezegd dat een combinatie van beide soorten vaagwijzigers de moeilijkheden alleen maar groter maakt. Op semantisch vlak kan dit voor enige verbetering zorgen (zie b.v. het voorstel van Novák [78]), maar op vlak van gemakkelijke en elegante toepasbaarheid en van veralgemeenbaarheid naar willekeurige universa en tralies van lidmaatschapsgraden moet men dan afrekenen met problemen op beide niveaus (zowel in het universum als op het niveau van lidmaatschapsgraden).

Deze tekortkomingen, enerzijds op vlak van semantiek en anderzijds op vlak van toepasbaarheid, zijn volgens ons te wijten aan het feit dat deze vaagwijzigers vrijwel louter technische hulpmiddelen zijn. Ze zijn ontstaan uit een zoektocht naar eenvoudige wiskundige operatoren die kunnen zorgen voor een zo getrouw mogelijke omzetting van een of meerdere lidmaatschapsfuncties voor atomaire termen naar lidmaatschapsfuncties voor gewijzigde termen, opgesteld vanuit de eigen intuïtie of, in mindere mate, voortgekomen uit psycholinguïstische experimenten. Het in rekening brengen van de betekenis van de gewijzigde termen lijkt daarbij niet verder te zijn gegaan dan bedenkingen in de stijl van “we moeten zorgen dat de lidmaatschapsfuncties voor zeer A lager liggen dan die van A ” (inclusieve interpretatie), a.h.w. het modelleren van semantisch entailment op de nonchalantst mogelijke manier. Het is precies op dit terrein, op het geven van betekenis aan de vaagwijzigers, dat er ruimte voor verbetering is. We zullen in het vervolg van dit werk dan ook L -vaagwijzigers met een inherente semantiek presenteren die een volmondige “ja” scoren voor alle kenmerken in bovenstaande tabel.

Hoofdstuk 5

Gelijkaardigheidsrelaties

Au lieu de chercher à concilier l'intuition avec l'analyse,
on s'est contenté de sacrifier l'une des deux,
et comme l'analyse doit rester impeccable,
c'est à l'intuition que l'on a donné tort.
(Henri Poincaré)

L'esprit n'use
de sa faculté créatrice
que quand l'expérience
lui en impose la nécessité.
(Henri Poincaré)

In dit hoofdstuk stellen we vast dat de Poincaré paradox kan opgelost worden m.b.v. vaagverzamelingenleer, zij het niet door vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties. We definiëren het concept “gelijkaardigheidsrelatie” als model voor benaderende gelijkheid.

5.1 De Poincaré paradox

Binnen het kader van scherpe verzamelingenleer is het gebruikelijk om gelijkheid te representeren door een equivalentierelatie.

5.1. Definitie (Equivalentierelatie). Een relatie E op X wordt een equivalentierelatie genoemd als en slechts als voor alle x, y en z in X :

- | | |
|---|------------------|
| (E.1) $(x, x) \in E$ | (reflexiviteit) |
| (E.2) $(x, y) \in E$ als en slechts als $(y, x) \in E$ | (symmetrie) |
| (E.3) Uit $(x, y) \in E$ en $(y, z) \in E$ volgt $(x, z) \in E$ | (transitiviteit) |

Aan het begin van de vorige eeuw merkte Poincaré [85] op dat niet alle vormen van gelijkheid uit de fysische werkelijkheid zich in het keurslijf van de transitiviteit laten duwen:

On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C . Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes:

$$A \approx B, B \approx C, A < C \quad (5.1)$$

qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.

Deze formule staat bekend als de Poincaré paradox. Men zegt dat een wiskundig model compatibel is met de Poincaré paradox, of nog, dat het de Poincaré paradox oplost, als men a.d.h.v. ervan de situatie uit (5.1) kan voorstellen.

In traditionele verzamelingenleer heeft men de mogelijkheid om voor twee objecten uit te drukken dat ze ofwel gelijk zijn, ofwel niet gelijk zijn. In L -vaagverzamelingenleer kan men daarnaast ook weergeven dat twee objecten aan elkaar gelijk zijn in een bepaalde mate. De Poincaré paradox (5.1) wordt opgelost door in te zien dat A en C nog wel aan elkaar gelijk kunnen zijn, maar slechts in een bepaalde mate. Wiskundig kan dit uitgedrukt worden door de gelijkheid voor te stellen door een L -vaagrelatie E die voldoet aan

$$E(A, B) = 1, E(B, C) = 1, E(A, C) < 1 \quad (5.2)$$

Eventueel kan de laatste ongelijkheid vervangen worden door $E(A, C) = 0$.

5.2. Definitie (Compatibiliteit). Een L -vaagrelatie E op X is compatibel met de Poincaré paradox indien

$$(\exists (x, y, z) \in X^3)(E(x, y) = 1 \wedge E(y, z) = 1 \wedge E(x, z) < 1) \quad (5.3)$$

Deze definitie die rechtstreeks voortvloeit uit Poincarés formule voor het fysische continuüm is zeer soepel in de zin dat er enkel een eis wordt opgelegd op het niveau van de hoogste lidmaatschapsgraden. Inderdaad, Definitie 5.2 drukt als eis voor de compatibiliteit van E met de Poincaré paradox het niet transitief zijn uit van de niveauverzameling E_1 . De definitie kan verstrengd worden door deze eis te herhalen voor alle niveauverzamelingen E_α (α in $]0, 1[$). Omdat deze verstrenging in dit hoofdstuk niet van belang is, hebben we ervoor geopteerd dit niet te doen. We zullen hierna aantonen dat geen enkele L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie compatibel is met de Poincaré paradox; hiervoor zal de “soepele” Definitie 5.2 reeds volstaan.

5.2 L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties en de Poincaré paradox

Het concept equivalentierelatie uit de traditionele verzamelingenleer kan, gebruik makend van een triangulaire norm $\mathcal{T}$, veralgemeend worden op de volgende manier:

5.3. Definitie (L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie, L -vage $\mathcal{T}$ -gelijkheid). Een L -vaagrelatie E op X wordt een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie genoemd als en slechts als voor alle x, y en z in X :

$$\begin{array}{ll} \text{(FE.1)} & E(x, x) = 1 \quad (\text{reflexiviteit}) \\ \text{(FE.2)} & E(x, y) = E(y, x) \quad (\text{symmetrie}) \\ \text{(FE.3)} & \mathcal{T}(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z) \quad (\mathcal{T}\text{-transitiviteit}) \end{array}$$

Indien bovendien aan de scheidingseigenschap voldaan is, nl.

$$E(x, y) = 1 \text{ als en slechts als } x = y$$

dan wordt de L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie een L -vage $\mathcal{T}$ -gelijkheid genoemd.

Men kan nagaan dat scherpe equivalentierelaties als een bijzonder geval aan bovenstaande definitie voldoen. Het begrip L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie kan ook op een alternatieve manier gedefinieerd worden, zoals blijkt uit de volgende karakterisatie.

5.4. Karakterisatie. Een L -vaagrelatie E op X is een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie als en slechts

$$\begin{array}{ll} \text{(FE.1')} & \mathbb{I}_{X \times X} \subseteq E \\ \text{(FE.2')} & E = E^{-1} \\ \text{(FE.3')} & E \circ_{\mathcal{T}} E \subseteq E \end{array}$$

Hoewel Definitie 5.3 en Karakterisatie 5.4 reeds neergeschreven zijn voor L -vaagrelaties (zie b.v. [92], [98]), worden ze voornamelijk gebruikt in het geval $L = [0, 1]$. De definitie van $[0, 1]$ -vage $\mathcal{T}$ -equivalentie relatie is zeer populair en kan o.m. teruggevonden worden in [7], [20], in [62] onder de naam “gelijkheidsrelatie” (equality relation) en in [94] onder de naam “ononderscheidbaarheidsoperator” (indistinguishability operator). Voor $\mathcal{T} = \mathcal{T}_W$ spreekt men ook van gelijkenisrelatie (likeness relation), terwijl men het voor $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ heeft over similariteitsrelatie (similarity relation) [103].

Al deze benamingen lijken aan te geven dat vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties modellen zijn voor benaderende gelijkheid (of gelijkaardigheid, gelijkenis, ononderscheidbaarheid). Bij nader inzien blijkt dit niet zo te zijn. Om te beginnen kan — omwille van de scheidingseigenschap — het “niet te onderscheiden zijn” uit het voorbeeld van Poincaré niet gemodelleerd worden door een vage $\mathcal{T}$ -gelijkheid. A en B zijn immers verschillende gewichten (i.e. $A \neq B$) en toch zijn ze niet te onderscheiden tijdens het experiment (i.e. $E(A, B) = 1$). Men gaat ook gemakkelijk na dat iedere L -vaagrelatie die voldoet aan de scheidingseigenschap niet kan voldoen aan Definitie (5.2).

Maar ook een vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie die *niet* voldoet aan de scheidingseigenschap is geen afdoende representatie voor de benaderende gelijkheid waarvan sprake is in het Poincaré voorbeeld. Immers uit $E(A, B) = 1$ en $E(B, C) = 1$ zou wegens de $\mathcal{T}$ -transitiviteit voor gelijk welke t-norm $\mathcal{T}$ volgen dat $E(A, C) = 1$, wat in directe tegenspraak is met de experimentele observatie dat A en C *wel* te onderscheiden zijn. Algemener kan men stellen:

5.5. Eigenschap. Een L -vaagrelatie E op X die voldoet aan

$$(\forall (x, y, z) \in X^3)(E(x, y) = 1 \Rightarrow E(x, z) = E(y, z)) \quad (5.4)$$

is niet compatibel met de Poincaré paradox.

Bewijs. Voor iedere x, y en z in X waarvoor geldt dat $E(x, y) = 1$ en dat $E(y, z) = 1$ geldt wegens (5.4) ook $E(x, z) = 1$. □

Voorwaarde (5.4) geldt triviaal voor elke L -vaagrelatie die voldoet aan de scheidingseigenschap. Bovendien geldt:

5.6. Eigenschap. Elke L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie voldoet aan (5.4).

Voor het bewijs verwijzen we naar [42].

5.7. Opmerking. In [42] wordt beweerd dat elke reflexieve en symmetrische vaagrelatie die voldoet aan (5.4) $\mathcal{T}_W$ -transitief is. Dit is echter niet het geval zoals blijkt uit volgend voorbeeld: stel $X = \{x_0, y_0, z_0\}$ en E bepaald door

E	x_0	y_0	z_0
x_0	1	0.9	0
y_0	0.9	1	0.9
z_0	0	0.9	1

De reflexiviteit en de symmetrie van E zijn eenvoudig na te gaan. Bovendien voldoet E aan de scheidingseigenschap en dus eveneens aan (5.4). Toch is $\mathcal{T}_W(E(x_0, y_0), E(y_0, z_0)) \leq E(x_0, z_0)$ niet geldig. Wel is voor symmetrische L -vaagrelaties voorwaarde (5.4) evenwaardig met de $\mathcal{T}_Z$ -transitiviteit, als een onmiddellijk gevolg van Eigenschap 5.6 en de volgende eigenschap.

5.8. Eigenschap. Elke symmetrische L -vaagrelatie E die voldoet aan (5.4) is $\mathcal{T}_Z$ -transitief.

Bewijs. Er kunnen zich 3 (niet noodzakelijk onderscheiden) gevallen voordoen voor willekeurige x, y en z in X :

- (a) $E(x, y) = 1$. In dit geval is $\mathcal{T}_Z(E(x, y), E(y, z)) = E(y, z)$ en volgt bovendien uit (5.4) dat $E(y, z) = E(x, z)$.
- (b) $E(y, z) = 1$. Uit een analoge redenering als in geval (a) volgt dat $\mathcal{T}_Z(E(x, y), E(y, z)) = E(x, y)$ en dat $E(y, x) = E(z, x)$.
- (c) $E(x, y) \neq 1$ en $E(y, z) \neq 1$. In dit geval is $\mathcal{T}_Z(E(x, y), E(y, z)) = 0$

In ieder geval is de ongelijkheid $\mathcal{T}_Z(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z)$ voldaan. □

Samenvattend kunnen we stellen dat geen enkele L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie compatibel is met de Poincaré paradox in de zin van Definitie 5.2. Het grote pijnpunt is de onverzoenbaarheid van de $\mathcal{T}$ -transitiviteit en het niet vervuld

zijn van de scheidingseigenschap. Niettegenstaande het niet vervuld karakter zich opdringt uit het experiment, offert men dit toch soms op in het voordeel van het behoud van de $\mathcal{T}$ -transitiviteit. Op die manier komt men tot L -vage $\mathcal{T}$ -gelijkheden (d.w.z. L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties die aan de scheidingseigenschap voldoen) die kunnen gebruikt worden als representatie van benaderende gelijkheid, op voorwaarde dat de t-norm in kwestie met zorg gekozen wordt (we komen hier in Sectie 5.4 nog op terug). Definitie 5.2 die zeer nauw aansluit bij het Poincaré experiment is dan uiteraard niet meer haalbaar.

In [53] wordt daarom als alternatieve definitie voor de compatibiliteit van E met de Poincaré paradox de niet-transitiviteit van de drager van E gebruikt. Deze alternatieve vorm van compatibiliteit is eenvoudig te verzoenen met $\mathcal{T}$ -transitiviteit wanneer men kiest voor een t-norm $\mathcal{T}$ met nuldelers.

Zoals reeds uit het Poincaré experiment blijkt is de scheidingseigenschap zeker niet altijd legio in het dagelijkse leven. Omdat het ons in de eerste instantie te doen is concepten uit de natuurlijke taal zo getrouw mogelijk te modelleren, kunnen we de scheidingseigenschap niet zonder meer aanvaarden. We zien ons dan ook genoodzaakt om precies de omgekeerde keuze te maken dan de gangbare, en te opteren voor het droppen van de $\mathcal{T}$ -transitiviteit teneinde een goed model voor benaderende gelijkheid te vinden dat van de scheidingseigenschap gevrijwaard is. Wanneer men in Definitie 5.3 van een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie conditie (FE.3) weglaat, houdt men de klasse van L -vage tolerantierelaties (d.w.z. reflexieve en symmetrische L -vaagrelaties) over. Deze klasse is zeer ruim, en lang niet al haar elementen zijn goede modellen voor benaderende gelijkheid. We proberen hier een mouw aan te passen door een alternatief derde criterium toe te voegen, dat gebaseerd is op een pseudo-metriek. Om deze keuze te motiveren gaan we eerst dieper in op de betekenis van benaderende gelijkheid.

5.3 Benaderende gelijkheid

Om de betekenis van benaderende gelijkheid in het dagelijkse leven te vatten, beginnen we met enkele voorbeelden.

5.9. Voorbeeld. [61] Een man wil een luxewagen kopen en ziet in een advertentie een speciale aanbieding voor deze auto voor €29.995. Hij besluit naar de autoverkoper te gaan en de auto te kopen. Wanneer hij ter plaatse komt, ontdekt hij dat de prijs eigenlijk €29.996 is. Bij het vergelijken met de advertentie realiseert hij zich dat hij de prijs verkeerd gelezen had. Niemand verwacht dat de klant op zijn beslissing zal terugkomen en de auto niet zal kopen omdat hij €1 duurder is dan eerst aangenomen. Voor hem zijn beide prijzen immers (zo goed als) gelijk. Een analoge redenering kan gemaakt worden voor een prijs van €29.998, een prijs van €29.999,... Toch kunnen we niet op die manier blijven doorgaan: de mate waarin de aanvankelijk aangenomen prijs en de nieuwe prijzen ongeveer gelijk zijn zal dan geleidelijk aan afnemen.

5.10. Voorbeeld. Denk aan de kinderen in een basisschool. Kinderen uit het-

zelfde leerjaar zijn normaal gezien ongeveer gelijk m.b.t. hun leeftijd (m.a.w. “van dezelfde leeftijd”) hoewel een zeer kleine minderheid van hen geboren zal zijn op dezelfde datum. Kinderen uit het eerste en kinderen uit het zesde leerjaar zijn gewoonlijk niet van dezelfde leeftijd. Kinderen in opeenvolgende jaar anderzijds kunnen beschouwd worden als zijnde van dezelfde leeftijd in zekere mate.

Uit deze en andere voorbeelden leiden we af dat benaderende gelijkheid kan beschreven worden op de volgende manier:

5.11. Beschrijving (Benaderende gelijkheid).

- (B.1) Benaderende gelijkheid is een relatie: grof gezegd is het een regel om objecten te verbinden.
- (B.2) Benaderende gelijkheid is een vaag concept: de overgang tussen “ongeveer gelijk aan” zijn en niet “ongeveer gelijk aan” zijn is niet abrupt maar gradueel.
- (B.3) Elk object is ongeveer gelijk aan zichzelf...
- (B.4) ... maar twee objecten kunnen ongeveer gelijk zijn ook al zijn ze niet exact gelijk.
- (B.5) Hoe kleiner de afstand tussen twee objecten is, hoe meer ze ongeveer gelijk zijn.

Omwille van (B.1) en (B.2) modelleren we benaderende gelijkheid a.d.h.v. een L -vaagrelatie. Uit (B.3) volgt dat deze relatie reflexief moet zijn, en omwille van (B.4) niet noodzakelijk aan de scheidingseigenschap voldoet. Vanuit wiskundig standpunt kan het vreemd overkomen dat informatie die men heeft over het niet exact gelijk zijn van twee objecten verloren gaat bij het modelleren van de mate waarin ze ongeveer gelijk zijn. Toch is dit de manier waarop mensen vaak redeneren: hoewel de klant weet dat er een verschil is van €1 tussen de verwachte en de werkelijke prijs van de auto, beschouwt hij ze toch als ongeveer gelijk en zal hij die auto kopen. Dit is ook de manier waarop mensen informatie uitwisselen: hoewel een vrouw zeker weet dat haar dochter 1 maand en 1 dag ouder is dan haar jongere nichtje, zal de moeder toch in bepaalde situaties zeggen dat de nichtjes van dezelfde leeftijd zijn. In het opzettelijk verhullen van precieze kennis achter vage linguïstische uitdrukkingen, volgen mensen vaak een van de conversatieregels uitgedrukt door Grice [48], nl. het “maxim of quantity”:

- (i) maak je bijdrage zo informatief als nodig voor de huidige uitwisselingsdoeleinden
- (ii) maak je bijdrage niet informatiever dan nodig

Wanneer men menselijk redeneren modelleert en gebruikersvriendelijke interfaces maakt, is het zeer wenselijk om dit gedrag te respecteren en na te bootsen. Bovendien weet men soms dat er wel degelijk een verschil is tussen twee objecten, maar weet men niet hoe groot het verschil is. In dit geval kan men ook een vage linguïstische uitdrukking gebruiken om dit gebrek aan kennis te verbergen: “Chris en Krista zijn ongeveer van dezelfde lengte, hoewel ik denk dat Chris iets groter is, dus het zal een schoon koppel zijn”.

(B.5) ten slotte drukt de dualiteit uit tussen benaderende gelijkheid en afstand. Om dit te kunnen weergeven, bekijken we eerst enkele wiskundige modellen voor afstand van nabij.

5.4 Afstandsfuncties

Het meest verspreide wiskundige model voor afstand is de (pseudo-)metriek. Het begrip metrische ruimte werd voor het eerst gebruikt door Fréchet [45] onder de naam “écart”. De huidige term “metrische ruimte” is door Hausdorff ingevoerd [49].

5.12. Definitie (Pseudo-metriek, metriek). Een $X^2 \rightarrow [0, +\infty[$ afbeelding d wordt een pseudo-metriek op X genoemd als en slechts als voor alle x, y en z in X :

- (PM.1) $d(x, x) = 0$ (pseudo-scheidingseigenschap)
- (PM.2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrie)
- (PM.3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (driehoeksongelijkheid)

Het koppel (X, d) wordt dan een pseudo-metrische ruimte genoemd. Indien ook

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

dan wordt d een metriek en (X, d) een metrische ruimte genoemd.

Wanneer het duidelijk of niet van belang is welke (pseudo-)metriek gebruikt wordt, spreekt men ook over de (pseudo-)metrische ruimte X . Het concept (pseudo-)metriek geeft onze intuïtieve notie van afstand weer. Meer in het bijzonder drukt de driehoeksongelijkheid uit dat de afstand van x naar z niet korter wordt door via een derde punt y te gaan. Deze derde conditie (PM.3) kan vervangen worden door een alternatieve conditie waar een t-conorm $\mathcal{S}$ aan te pas komt. Zo ontstaat de definitie van $\mathcal{S}$ -pseudometriek [94]. In tegenstelling tot de som is het begrip t-conorm gedefinieerd in een willekeurige begrensde tralie L . We kiezen er hier dan ook voor om de in [94] gegeven definitie hier in die zin te veralgemenen.

5.13. Definitie ($\mathcal{S}$ -pseudo-metriek, $\mathcal{S}$ -metriek). Een $X^2 \rightarrow L$ afbeelding d wordt een $\mathcal{S}$ -pseudo-metriek op X genoemd als en slechts als voor alle x, y en z in X :

- (SPM.1) $d(x, x) = 0$ (pseudo-scheidingseigenschap)
- (SPM.2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrie)
- (SPM.3) $\mathcal{S}(d(x, y), d(y, z)) \geq d(x, z)$ (driehoeksongelijkheid)

Indien ook

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

dan wordt d een $\mathcal{S}$ -metriek genoemd.

5.14. Voorbeelden.

1. Iedere deelverzameling A van $\mathbb{R}$ kan tot een metrische ruimte gemaakt worden door als afstandsfunctie de absolute waarde-metrick $d_{|\cdot|}$ te nemen, gedefinieerd door $d_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|$ voor alle x en y in A .

2. De euclidische metrick $d^{(2)}$ op $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$d^{(2)}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

voor alle (x_1, y_1) en (x_2, y_2) in $\mathbb{R}^2$.

3. Een andere metrick op $\mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd door

$$d^{(1)}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

voor alle (x_1, y_1) en (x_2, y_2) in $\mathbb{R}^2$. Deze metrick wordt de taximetrick genoemd omdat hij de afstand meet die een taxi aflegt in een stad als New York, waar de straten alleen noord-zuid en oost-west lopen.

4. $\mathbb{R}^3$ kan tot een metrische ruimte gemaakt worden m.b.v. de max-metrick $d^{(\infty)}$ gedefinieerd door

$$d^{(\infty)}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|)$$

voor alle (x_1, y_1, z_1) en (x_2, y_2, z_2) in $\mathbb{R}^3$.

5. Indien (X, d) een pseudo-metrische ruimte is, dan is (X, d_1) met $d_1(x, y) = \min(1, d(x, y))$ voor alle x en y in X eveneens een pseudo-metrische ruimte. De afbeelding d_1 neemt dan waarden aan in $[0, 1]$.

6. Voor elke t-conorm $\mathcal{S}$ kan een willekeurige verzameling X tot $\mathcal{S}$ -metrische ruimte gemaakt worden door als afstandsfunctie de discrete metrick

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

voor alle x en y in X te nemen.

7. De klasse van $[0, 1]$ -waardige $\mathcal{S}_W$ -pseudo-metrieken valt samen met de klasse van $[0, 1]$ -waardige pseudo-metrieken.

8. Een $[0, +\infty[$ -waardige $\mathcal{S}_M$ -metrick wordt ook ultra-metrick genoemd.

Zoals o.m. al uit bovenstaande voorbeelden duidelijk wordt, beschikken we over een heel arsenaal van bekende (pseudo-)metrieken. Dit is meteen ook de reden waarom we de dualiteit (B.5) aanwenden: nl. om uit gekende afstandsfuncties gezochte modellen voor benaderende gelijkheid af te leiden. We merken in dat verband op dat Definitie 5.3 op zich weinig constructief is: enerzijds zijn de reflexiviteit en de symmetrie wel zeer concrete en gemakkelijk implementeerbare instructies voor het bouwen van een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie, maar

anderzijds is de $\mathcal{T}$ -transitiviteit niet zo eenvoudig te controleren en brengt deze voorwaarde bovendien een grote vrijheidsgraad met zich mee, inherent aan de keuze van de t-norm $\mathcal{T}$. Een recht-door-zee techniek om, vertrekkend van een afstandsfunctie, een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie tot stand te brengen, wordt gegeven door de volgende eigenschap:

5.15. Eigenschap. [94] Voor iedere t-norm $\mathcal{T}$ en iedere involutieve negator $\mathcal{N}$ zijn de volgende twee uitdrukkingen equivalent:

- (1) E is een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie op X
- (2) $co_{\mathcal{N}}E$ is een $\mathcal{T}^{\leftrightarrow \mathcal{N}}$ -pseudo-metrick op X

of nog:

- (1') d is een $\mathcal{S}$ -pseudo-metrick op X
- (2') $co_{\mathcal{N}}d$ is een L -vage $\mathcal{S}^{\leftrightarrow \mathcal{N}}$ -equivalentierelatie op X

Zoals we in Voorbeeld 5.14 vermeld hebben, kan voor een iedere t-conorm $\mathcal{S}$ een willekeurige verzameling X uitgerust worden met de discrete metrick. M. b. v. Eigenschap 5.15 is het dus formeel steeds mogelijk om een L -vage $\mathcal{S}^{\leftrightarrow \mathcal{N}}$ -equivalentierelatie op X te definiëren, nl. $co_{\mathcal{N}}d$. Men gaat echter gemakkelijker na dat dit precies de scherpe gelijkheid is op X .

Zoals aangehaald in Sectie 5.2 kunnen L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties gebruikt worden voor het representeren van benaderende gelijkheid *op voorwaarde dat men kan leven met de scheidingseigenschap*. Om m. b. v. Eigenschap 5.15 L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties tot stand te brengen die zich hiertoe lenen, moet men vertrekken van een *zinvolle* $\mathcal{S}$ -pseudo-metrick op het universum in kwestie. De keuze van de t-norm $\mathcal{T}$ komt dan niet uit het ijlle maar wordt bepaald door $\mathcal{S}$ en de involutieve negator $\mathcal{N}$. Wanneer de verzameling van de lidmaatschapsgraden $[0, 1]$ is, is het gebruikelijk om hiervoor de standaardnegator $\mathcal{N}_s$ te nemen. Zoals we al eerder uitgelegd hebben is geen enkele L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie echter in staat om (B.4) te modelleren. Daarom introduceren we in de volgende sectie het concept van gelijkaardigheidsrelatie.

5.5 Gelijkaardigheidsrelaties

5.16. Definitie (Gelijkaardigheidsrelatie). Een L -vaagrelatie E op een $\mathcal{S}$ -pseudo-metrische ruimte (X, d) wordt een gelijkaardigheidsrelatie (m.b.t. d) genoemd als en slechts als voor alle x, y, z en u in X :

- (R.1) $E(x, x) = 1$ (reflexiviteit)
- (R.2) Uit $d(x, y) \leq d(z, u)$ volgt $E(x, y) \geq E(z, u)$ (dualiteit)

Een gelijkaardigheidsrelatie is een L -vaagrelatie ((B.1) en (B.2)). (B.3) en (B.5) worden respectievelijk vertolkt door (R.1) en (R.2). Een zorgvuldige formulering van (R.2) zorgt ervoor dat (B.4) en de compatibiliteit met de Poincaré paradox niet uitgesloten worden (zie verder). Uit (R.2) volgt dat elke gelijkaardigheidsrelatie symmetrisch is. Wanneer het niet onmiddellijk duidelijk is welke

betekenisvolle pseudo-metrik op X beschikbaar is, kan een afbeelding g van X naar een pseudo-metrische ruimte soelaas bieden. Conditie (R.2) wordt dan

$$\text{Uit } d(g(x), g(y)) \leq d(g(z), g(u)) \text{ volgt } E(x, y) \geq E(z, u)$$

We merken ten slotte op dat de $X^2 - L_1$ afbeelding d uit Definitie 5.16 elementen uit X^2 afbeeldt op elementen uit een tralie L_1 die niet noodzakelijk gelijk is aan de tralie L die de lidmaatschapsgraden voor de L -vaagrelatie E levert. Het is m.a.w. mogelijk om b.v. vertrekkend van een pseudo-metrik (die bij definitie waarden aanneemt in $[0, +\infty]$) een gelijkaardigheidsrelatie te definiëren met lidmaatschapsgraden in $[0, 1]$.

5.17. Eigenschap. Zij $\mathcal{T}$ een t-norm, $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}_1$ t-conormen en (X, d) een $\mathcal{S}_1$ -pseudo-metrische ruimte. Als E_1 en E_2 gelijkaardigheidsrelaties op X m.b.t. d zijn dan geldt:

1. $E_1 \cap_{\mathcal{T}} E_2$ is een gelijkaardigheidsrelatie op X m.b.t. d
2. $E_1 \cup_{\mathcal{S}} E_2$ is een gelijkaardigheidsrelatie op X m.b.t. d

Bewijs. $E_1 \cap_{\mathcal{T}} E_2$ and $E_1 \cup_{\mathcal{S}} E_2$ zijn L -vaagrelaties op X . We gaan na dat (R.1) en (R.2) gelden voor $E_1 \cap_{\mathcal{T}} E_2$. (Het bewijs voor $E_1 \cup_{\mathcal{S}} E_2$ verloopt analoog). Voor alle x, y, z en u in X :

$$(E_1 \cap_{\mathcal{T}} E_2)(x, x) = \mathcal{T}(E_1(x, x), E_2(x, x)) = \mathcal{T}(1, 1) = 1 \quad (\text{R.1})$$

Bovendien volgt uit $d(x, y) \leq d(z, u)$ dat $E_1(x, y) \geq E_1(z, u)$ en $E_2(x, y) \geq E_2(z, u)$ en dus vermits $\mathcal{T}$ stijgend is:

$$\mathcal{T}(E_1(x, y), E_2(x, y)) \geq \mathcal{T}(E_1(z, u), E_2(z, u))$$

Door toepassen van de definitie van $\cap_{\mathcal{T}}$:

$$(E_1 \cap_{\mathcal{T}} E_2)(x, y) \geq (E_1 \cap_{\mathcal{T}} E_2)(z, u) \quad (\text{R.2})$$

□

5.18. Eigenschap. Voor elke gelijkaardigheidsrelatie E op (X, d) geldt

$$\text{Uit } d(x, y) = d(z, u) \text{ volgt } E(x, y) = E(z, u)$$

voor alle x, y, z en u in X .

Bewijs. Uit $d(x, y) \leq d(z, u)$ volgt $E(x, y) \geq E(z, u)$. Op dezelfde manier volgt uit $d(z, u) \leq d(x, y)$ dat $E(z, u) \geq E(x, y)$, en dus de gelijkheid.

□

De implicatie in (R.2) is eenrichtingsverkeer. Dit laat toe om een vorm van verlies van informatie te representeren, conform de conversatieregels van Grice zoals besproken in Sectie 5.3. Indien in (R.2) de implicatie ook in de omgekeerde richting zou opgelegd zijn, dan zou de omgekeerde eigenschap van 5.18 gelden. Door het opleggen van deze strengere variant van (R.2) zouden we het verlies van

informatie dat de menselijke communicatie soms kenmerkt, uitsluiten, waardoor het concept gelijkaardigheidsrelatie aan haar doel zou voorbij schieten. Stel immers dat uit $E(x, y) = E(z, u)$ zou volgen dat $d(x, y) = d(z, u)$, dan zou E voldoen aan (5.4) en dus niet compatibel zijn met de Poincaré paradox. Immers uit $E(x, y) = 1$ volgt $E(x, y) \geq E(x, x)$, waaruit dan zou volgen dat $d(x, y) \leq d(x, x) = 0$. Wegens de driehoeksongelijkheid hebben we:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(y, z)$$

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq d(x, z)$$

waaruit $d(x, z) = d(y, z)$ en $E(x, z) = E(y, z)$. Indien de omgekeerde implicatie in (R.2) ook zou gelden, bekomen we m.a.w. dat

$$\text{uit } E(x, y) = 1 \text{ volgt } E(x, z) = E(y, z)$$

waaruit zou blijken dat E voldoet aan (5.4).

Zoals uit de volgende eigenschap blijkt, zijn L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties speciale gevallen van gelijkaardigheidsrelaties.

5.19. Eigenschap. Zij $\mathcal{T}$ een t-norm en $\mathcal{N}$ een involutieve negator, dan geldt: iedere L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie E op X is een gelijkaardigheidsrelatie m.b.t. $co_{\mathcal{N}}(E)$.

Bewijs. Aangezien E een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie is op X , is $co_{\mathcal{N}}(E)$ een $\mathcal{T}^{\leftrightarrow \mathcal{N}}$ -pseudo-metrik op X (Eigenschap 5.15). Een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie is reflexief, dus (R.1) geldt. Voor alle (x, y, z, u) in X^4 leiden we uit

$$co_{\mathcal{N}}(E)(x, y) \leq co_{\mathcal{N}}(E)(z, u)$$

af dat

$$co_{\mathcal{N}}(co_{\mathcal{N}}(E))(x, y) \geq co_{\mathcal{N}}(co_{\mathcal{N}}E)(z, u)$$

en dus

$$E(x, y) \geq E(z, u)$$

waaruit (R.2). □

De volgende eigenschap gaat nog een stap verder door uit te drukken dat alle vage tolerantierelaties bijzondere gevallen zijn van gelijkaardigheidsrelaties.

5.20. Eigenschap. [61] Iedere vage tolerantierelatie E op X is een gelijkaardigheidsrelatie m.b.t. de pseudo-metrik d die gedefinieerd is als

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{als } x = y \\ 2 - E(x, y), & \text{anders} \end{cases}$$

voor alle x en y in X .

Vanuit modelleringsstandpunt is het fundamenteel verschil tussen Eigenschap 5.19 en 5.20 de vrij kunstmatige aard van de pseudo-metrick in 5.20. Uit beide eigenschappen blijkt in elk geval dat niet elke L -vaagrelatie die voldoet aan Definitie 5.16 een goed model is voor benaderende gelijkheid. Het concept gelijkaardigheidsrelatie is m.a.w. niet krachtig genoeg om benaderende gelijkheid af te dwingen. Het grote voordeel t.o.v. het (te krachtige) concept L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie is echter dat L -vaagrelaties die gevrijwaard zijn van de scheidingseigenschap niet bij voorbaat uitgesloten worden. Net zoals bij L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties de kwaliteit van het model afhangt van de keuze van de t -norm — al dan niet afgeleid uit een op het universum aanwezige zinvolle S -pseudo-metrick — moet men in Definitie 5.16 uitgaan van een zinvolle S -pseudo-metrick om tot een bevredigend resultaat te komen.

5.21. Eigenschap. Zij $\mathcal{N}$ een negator en (X, d) een S -pseudo-metrische ruimte, dan geldt: $\text{co}_\mathcal{N}d$ is een gelijkaardigheidsrelatie op X m.b.t. d .

Bewijs.

(R.1) volgt uit de pseudo-scheidingseigenschap van d en uit $\mathcal{N}(0) = 1$.

(R.2) volgt uit het dalend zijn van $\mathcal{N}$.

□

5.22. Eigenschap. Zij f een stijgende L - L afbeelding en de L -vaagrelatie E een gelijkaardigheidsrelatie op X m.b.t. een pseudo-metrick d , dan is ook $f \circ E$ een gelijkaardigheidsrelatie op X m.b.t. d .

5.23. Eigenschap. Voor elke pseudo-metrick d op X , voor a in $[1, +\infty[$, b in $[0, +\infty[$ geldt: E gedefinieerd door

$$E(x, y) = \min(1, \max(0, a - b \cdot d(x, y)))$$

voor alle x en y in X , is een $[0, 1]$ -waardige gelijkaardigheidsrelatie op X m.b.t. d . Bovendien geldt

$$\begin{aligned} E(x, y) = 1 & \quad \text{als en slechts als} \quad d(x, y) \leq \frac{a-1}{b} \\ E(x, y) = 0 & \quad \text{als en slechts als} \quad d(x, y) \geq \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Bewijs.

(R.1) is gegarandeerd door $a \geq 1$.

(R.2) is gegarandeerd door $b \geq 0$.

□

Eigenschap 5.21 kan gebruikt worden om uit de op het universum aanwezige pseudo-metrick d een gelijkaardigheidsrelatie E af te leiden m.b.v. de standaard-negator $\mathcal{N}_s$. Aangezien $\mathcal{N}_s$ involutief is, zullen voor een dergelijke d en E in (R.2) de implicaties in beide richtingen gelden. Om tot een vaagrelatie E te komen waarbij enkel de implicatie van links naar rechts geldt, kan gebruik gemaakt worden van Eigenschap 5.22. Een alternatief is om onmiddellijk gebruik te maken van Eigenschap 5.23 die kan gezien worden als een combinatie van Eigenschap 5.21 en 5.22. Inderdaad: als d een pseudo-metrick is op X , dan is d_1 gedefinieerd als $d_1(x, y) = \frac{b}{a}d(x, y)$, met a in $[1, +\infty[$ en b in $[0, +\infty[$, eveneens een

pseudo-metrik op X . d_2 gedefinieerd als $d_2(x, y) = \min(1, d_1(x, y))$ is dan een $[0, 1]$ -waardige pseudo-metrik op X (zie Voorbeeld 5.14). Wegens Eigenschap 5.21 is $E_1 = co(d_2)$ een gelijkaardigheidsrelatie m.b.t. d_2 . De $[0, 1] \times [0, 1]$ afbeelding f gedefinieerd als $f(x) = \min(1, a \cdot x)$ is stijgend en voldoet bovendien aan $f(1) = 1$ omdat $a \geq 1$. Wegens Eigenschap 5.22 is dus ook $f \circ E_1$ een gelijkaardigheidsrelatie. Men kan nagaan dat dit de vaagrelatie E uit Eigenschap 5.23 is.

5.24. Voorbeeld. Zij $X = [0, 150]$ een universum van leeftijden. X kan tot een metrische ruimte gemaakt worden d.m.v. $d_{|\cdot|}$ (zie Voorbeeld 5.14). Wegens Eigenschap 5.23 is de vaagrelatie E gedefinieerd als

$$E(x, y) = \max(0, \min(1, 1.1 - \frac{1}{10}d_{|\cdot|}(x, y)))$$

voor alle x en y in X een gelijkaardigheidsrelatie op X m.b.t. $d_{|\cdot|}$. We berekenen een paar lidmaatschapsgraden: $E(50, 56) = 0.5$, $E(50, 52) = 0.9$ en $E(56, 52) = 0.7$, waaruit duidelijk volgt dat $E(50, 56) < E(50, 52)$ en $E(56, 52) < E(50, 52)$. $E(20, 22) = 0.9$, $E(22, 24) = 0.9$ en $E(20, 24) = 0.7$, waaruit duidelijk is dat $E(20, 22) > E(20, 24)$ en $E(22, 24) < E(20, 24)$. Bovendien hebben we $E(20, 20) = 1$ en $E(20, 20.5) = 1$: verschillende leeftijden kunnen dus ongeveer gelijk zijn in de mate 1.

5.25. Voorbeeld. Zij X een universum van sprookjesfiguren

$$X = \{ \text{sneewitje, heks, wolf, dwerg, prins, roodkapje} \}$$

waarin de vaagverzamelingen mooi, doorsnee en lelijk gedefinieerd zijn als volgt:

	mooi	doorsnee	lelijk
sneewitje	1.00	0.00	0.00
heks	0.00	0.30	0.70
wolf	0.00	0.00	1.00
dwerg	0.10	0.70	0.20
prins	0.80	0.20	0.00
roodkapje	0.50	0.50	0.00

Om een gelijkaardigheidsrelatie op X te construeren die benaderende gelijkheid m.b.t. schoonheid modelleert, gaan we als volgt te werk: een zinvolle metrik op het universum van de sprookjesfiguren ligt niet voor de hand. Daarom maken we gebruik van een $X - [0, 1]^3$ afbeelding g gedefinieerd door $g(x) = (\text{mooi}(x), \text{doorsnee}(x), \text{lelijk}(x))$, voor alle x in X . Op $[0, 1]^3$ is de maxmetrik $d^{(\infty)}$ ter beschikking. Uit Eigenschap 5.21 weten we dat $E = co(d^{(\infty)})$ een gelijkaardigheidsrelatie m.b.t. $d^{(\infty)}$ is. De matrixvoorstelling van deze vaagrelatie

is:

E	sneeuwwitje	heks	wolf	dwerg	prins	roodkapje
sneeuwwitje	1.00	0.00	0.00	0.10	0.80	0.50
heks	0.00	1.00	0.70	0.50	0.20	0.30
wolf	0.00	0.70	1.00	0.20	0.00	0.00
dwerg	0.10	0.50	0.20	1.00	0.30	0.60
prins	0.80	0.20	0.00	0.30	1.00	0.70
roodkapje	0.50	0.30	0.00	0.60	0.70	1.00

De elementen op de diagonaal zijn 1 omwille van de reflexiviteit van E . Ook de symmetrie komt duidelijk naar voor in bovenstaande matrix. De nawijzige van de contrastintensificator $\text{CINT}_{0.3}$ voldoet aan de voorwaarden van Eigenschap 5.22; de vaagrelatie $E_1 = \text{CINT}_{0.3}(E)$ is dus ook een gelijkaardigheidsrelatie m.b.t. $d^{(\infty)}$. Haar matrixvoorstelling is:

E_1	sneeuwwitje	heks	wolf	dwerg	prins	roodkapje
sneeuwwitje	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.50
heks	0.00	1.00	1.00	0.50	0.00	0.00
wolf	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
dwerg	0.00	0.50	0.00	1.00	0.00	0.88
prins	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
roodkapje	0.50	0.00	0.00	0.88	1.00	1.00

Men gaat eenvoudig na dat voor geen enkele t-norm $\mathcal{T}$ de $\mathcal{T}$ -transitiviteit geldt. Zo zijn b.v. sneeuwwitje en de prins ongeveer gelijk in de mate 1, de prins en roodkapje eveneens, maar sneeuwwitje en roodkapje zijn slechts in de mate 0.5 ongeveer gelijk.

Hoofdstuk 6

De Horizonaanpak

Alles is
moeilijk voordat het
gemakkelijk begint te worden.
(Anoniem)

Het grote verschil tussen de eerste en de tweede generatie representaties van gewijzigde linguïstische termen, is dat er bij de laatste soort een duidelijke onderliggende betekenis aanwezig is. Novák was met zijn horizonaanpak de eerste die iets realiseerde in die richting. Hij beperkte zich daarbij tot de inclusieve interpretatie waarbij het universum (een geschikte deelverzameling van) $\mathbb{R}$ is. In dit hoofdstuk zetten we de horizonaanpak verder op punt zodat ze kan uitgebreid worden tot de niet-inclusieve interpretatie en tot andere universa.

6.1 Inleiding

Bouchon-Meunier was de eerste die op de proppen kwam met een haalbaar idee dat vrij sterk afweek van de traditionele aanpak (de zgn. opsplitsbare vaagwijzigers), door a.h.w. eens over de grenzen van het reële eenheidsinterval heen te kijken ([9], [10], [11]). De kern van deze nieuwe methode bestaat erin om, vertrekkend van een X - $\mathbb{R}$ afbeelding A' (de hulpfunctie genoemd), de lidmaatschapsfunctie A van een atomaire term te definiëren als

$$A(x) = \min(1, \max(0, A'(x)))$$

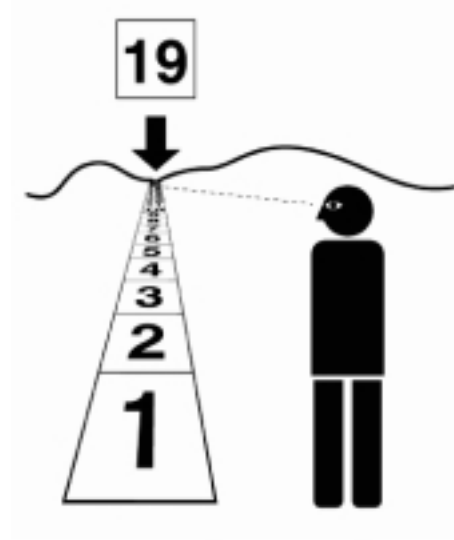
voor alle x in het universum X . A ontstaat m.a.w. uit A' door een venster te leggen waardoor men enkel nog de waarden tussen 0 en 1 ziet. Om de representatie van een gewijzigde term te bekomen, wordt achter de schermen de hulpfunctie gewijzigd, zodat het beeld dat te zien is door het venster, verandert. Eén van de technieken daarbij is het naar boven of naar beneden schuiven van A' (d.w.z. het optellen van eenzelfde positief of negatief reëel getal bij $A'(x)$, voor alle x in X). In de lijn van de terminologie uit Hoofdstuk 4, moet een dergelijke

verschuiving eerder gezien worden als een nawijziging dan als een voorwijziging zoals die bij verschuivende wijzigers angewend wordt. Deze werkwijze geeft veel speelruimte om bepaalde effecten door te drukken (zoals een verandering van de drager), maar draagt ook weer geen echte betekenis in zich. Dit laat zich o.m. voelen in het feit dat de studie van het effect van deze vaagwijzigers volledig werd uitgevoerd voor een zeer specifieke klasse van lidmaatschapsfuncties, en dat zij zich bovendien niet vlot laten uitbreiden naar L -vaagwijzigers voor L verschillend van $[0, 1]$.

Enkele jaren later stelde Novák ([79], [80], [81]) een nieuwe aanpak voor die in zekere zin doet denken aan die van Bouchon-Meunier. Zoals in Hoofdstuk 4 duidelijk werd, zijn de opsplitsbare L -vaagwijzigers a.h.w. operatoren die zonder meer ingrijpen op de lidmaatschapsfuncties van de te wijzigen termen. Bij de voorstellen van Bouchon-Meunier en van Novák daarentegen, krijgen we te maken met enige assistentie van een hoger niveau: bij Bouchon-Meunier is dat onder de vorm van een hulpfunctie, bij de aanpak van Novák wordt een beroep gedaan op een horizongenerator.

Novák ontwikkelde de horizonaanpak enkel voor de representatie van (gewijzigde) linguïstische termen in de inclusieve interpretatie met als universum (een geschikte deelverzameling van) $\mathbb{R}$. Hij maakte daarbij gebruik van ideeën uit de alternatieve verzamelingenleer. De duidelijk aanwezige betekenis enerzijds en de opvallende eenvoud anderzijds boeiden ons in zo'n mate dat we deze aanpak wilden uitbreiden. Het feit dat deze uitbreiding zich vlot laat verwezenlijken mag trouwens gezien worden als een bewijs van de kracht van deze methode.

We willen er van bij het begin de nadruk op leggen dat we in dit hoofdstuk een heel eigen interpretatie van de ideeën van Novák weergeven. Zo is onze uitwerking extensioneel, wat wil zeggen dat we bouwen aan representaties voor linguïstische termen die opgaan voor een bepaalde waarnemer in een bepaalde context. De gelijkenissen die er zijn tussen de representaties over verschillende contexten en waarnemers heen behandelen we zoals in de rest van dit werk enkel informeel (gebruik van dezelfde algemene-vorm-functie maar met andere parameters), terwijl Novák bij de representatie van een term ook de intensie formeel in rekening tracht te brengen. Bovendien ziet Novák een wijziging van een linguïstische term als een verschuiven van de horizon, terwijl we het eerder hebben over het opzetten of afzetten van een bril waardoor de horizon uiteraard ook in zeker zin lijkt dichter te komen of verder te staan. Om onze ideeën te formaliseren, voeren we de concepten “horizonfunctie”, “horizongenerator” en “gezichtsvermogen” in. Deze noties vergemakkelijken de uitbreiding naar enerzijds de niet-inclusieve interpretatie, en anderzijds niet-numerieke universa (meer bepaald pseudo-metrische ruimten). We geven hierbij ook enkele voorbeelden van horizonfuncties. Zij kunnen beschouwd worden als veralgemeningen van de typische lidmaatschapsfuncties uit Hoofdstuk 3.



Figuur 6.1: Het pad

6.2 Het horizonconcept

We stellen ons voor dat we aan het begin van een lang pad staan (zie Figuur 6.1). Iemand heeft alle tegels op dat pad genummerd. Wanneer we kijken naar de tegel onder onze voeten, d.i. de eerste tegel van het pad, dan zien we het cijfer 0 duidelijk. Vervolgens kijken we naar de tegel vlak voor ons; deze tegel draagt het cijfer 1, zoals we duidelijk kunnen zien. De nummers op de volgende tegels zijn ook duidelijk leesbaar, maar ergens op het pad, b.v. na de zesde tegel (d.i. de tegel met nummer 5), wordt het moeilijker om de nummers te onderscheiden. Ergens in de verte, laat ons zeggen na de 20ste tegel (d.i. de tegel met nummer 19) is er zelfs een punt waarop de nummers ophouden zichtbaar te zijn (de horizon). Ons gezichtsvermogen wordt m.a.w. gekenmerkt door de parameters $\alpha = 5$ en $\gamma = 20$, met de volgende betekenis: alle nummers die op de eerste $\alpha + 1$ tegels staan, kunnen we duidelijk zien. Alle nummers die niet op de eerste γ tegels staan, kunnen we helemaal niet zien. Bovendien neemt de zichtbaarheid van een nummer op één van de andere tegels af met de toenemende afstand tussen ons en die tegel, m.a.w. met het stijgend aantal tegels dat ligt tussen ons en de tegel die we proberen te lezen. De volgende definities scheppen een formeel kader voor dit voorbeeld.

6.1. Definitie (Gezichtsvermogen). Een gezichtsvermogen is een element van $\mathbb{V} = \{(\alpha, \gamma) | \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ en } \gamma \in \mathbb{R}^+ \text{ en } \alpha < \gamma\}$.

De zichtbaarheid van de elementen van X voor een waarnemer op positie Ω in X met gezichtsvermogen (α, γ) kan uitgedrukt worden d.m.v. een $X \rightarrow [0, 1]$ afbeelding die we horizonfunctie noemen.

6.2. Definitie (Horizonfunctie). Stel (X, d) een pseudo-metrische ruimte. Voor Ω in X en (α, γ) in $\mathbb{V}$ noemen we een X -[0,1] afbeelding f een $(\Omega, (\alpha, \gamma))$ -horizonfunctie op X (m.b.t. d) a.s.a. voor alle x en y in X

- (HF.1) $d(\Omega, x) \leq \alpha \Rightarrow f(x) = 1$
- (HF.2) $\gamma \leq d(\Omega, x) \Rightarrow f(x) = 0$
- (HF.3) $d(\Omega, x) \leq d(\Omega, y) \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Wanneer de afstand tussen de waarnemer op Ω , en het element x van X dat hij probeert te zien, kleiner dan of gelijk is aan α , dan kan hij x duidelijk zien. Anderzijds als de afstand groter dan of gelijk is aan γ , dan kan hij x helemaal niet zien. Bovendien neemt de zichtbaarheid van x af met de toenemende afstand tussen Ω en x .

6.3. Eigenschap. Stel (X, d) een pseudo-metrische ruimte, Ω in X , (α_1, γ_1) en (α_2, γ_2) in $\mathbb{V}$. Als $\alpha_2 \leq \alpha_1$ en $\gamma_1 \leq \gamma_2$, dan is iedere $(\Omega, (\alpha_1, \gamma_1))$ -horizonfunctie een $(\Omega, (\alpha_2, \gamma_2))$ -horizonfunctie.

Bewijs. Het bewijs volgt rechtstreeks uit de definitie.

6.4. Eigenschap. Stel (X, d) een pseudo-metrische ruimte, Ω in X , (α_1, γ_1) en (α_2, γ_2) in $\mathbb{V}$. Als f een $(\Omega, (\alpha_1, \gamma_1))$ -horizonfunctie is en g een $(\Omega, (\alpha_2, \gamma_2))$ -horizonfunctie is, dan geldt voor iedere triangulaire norm $\mathcal{T}$ en iedere triangulaire conorm $\mathcal{S}$

- (1) $f \cap_{\mathcal{T}} g$ is een $(\Omega, (\alpha_1 \wedge \alpha_2, \gamma_1 \wedge \gamma_2))$ -horizonfunctie
- (2) $f \cup_{\mathcal{S}} g$ is een $(\Omega, (\alpha_1 \vee \alpha_2, \gamma_1 \vee \gamma_2))$ -horizonfunctie

Bewijs. Neem x in X . Stel $d(\Omega, x) \leq \alpha_1 \wedge \alpha_2$ dan is $d(\Omega, x) \leq \alpha_1$ en $d(\Omega, x) \leq \alpha_2$, waaruit $f(x) = 1$ en $g(x) = 1$. Hieruit volgt $f \cap_{\mathcal{T}} g(x) = 1$ (HF.1). Anderzijds als $d(\Omega, x) \geq \gamma_1 \vee \gamma_2$ dan is ofwel $d(\Omega, x) \geq \gamma_1$ ofwel $d(\Omega, x) \geq \gamma_2$ (ofwel beide), dus ofwel $f(x) = 0$ ofwel $g(x) = 0$ (ofwel beide). Hieruit volgt hoe dan ook dat $f \cap_{\mathcal{T}} g(x) = 0$ (HF.2). (HF.3) volgt uit het stijgend zijn van $\mathcal{T}$. Het bewijs van (2) verloopt volledig analoog. $\square$

Vervolgens introduceren we het concept horizongenerator. Dit is een $(X \times \mathbb{V})$ - $\mathcal{F}(X)$ afbeelding die met elk observatiepunt Ω en gezichtsvermogen (α, γ) een geschikte $(\Omega, (\alpha, \gamma))$ -horizonfunctie associeert. We vertolken hierbij dat een waarnemer met een groter gezichtsvermogen beter (of althans “niet slechter”) ziet.

6.5. Definitie (Horizongenerator). Stel (X, d) een pseudo-metrische ruimte. Een $(X \times \mathbb{V})$ - $\mathcal{F}(X)$ afbeelding $\mathbb{H}$ wordt een horizongenerator (m.b.t. d) op X genoemd a.s.a. voor alle Ω in X en voor alle (α, γ) , (α_1, γ_1) en (α_2, γ_2) in $\mathbb{V}$:

- (HG.1) $\mathbb{H}(\Omega, (\alpha, \gamma))$ is een $(\Omega, (\alpha, \gamma))$ -horizonfunctie op X m.b.t. d
- (HG.2) Uit $\alpha_1 \leq \alpha_2$ en $\gamma_1 \leq \gamma_2$ volgt $\mathbb{H}(\Omega, (\alpha_1, \gamma_1)) \subseteq \mathbb{H}(\Omega, (\alpha_2, \gamma_2))$

In de volgende 2 eigenschappen definiëren we 2 soorten horizongeneratoren.

6.6. Eigenschap. Stel (X, d) een pseudo-metrische ruimte. De $(X \times \mathbb{V})$ - $\mathcal{F}(X)$ afbeelding $\mathbb{G}_d$ gedefinieerd als

$$\mathbb{G}_d(\Omega, (\alpha, \gamma))(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } d(\Omega, x) \leq \alpha \\ \frac{\gamma - d(\Omega, x)}{\gamma - \alpha}, & \text{als } \alpha \leq d(\Omega, x) \leq \gamma \\ 0, & \text{als } \gamma \leq d(\Omega, x) \end{cases}$$

voor alle Ω in X en (α, γ) in $\mathbb{V}$, voor alle x in X , is een horizongenerator op X m.b.t. d .

Bewijs. We bewijzen eerst (HG.1): voor Ω in X en (α, γ) in $\mathbb{V}$ moeten we aantonen dat $f = \mathbb{G}_d(\Omega, (\alpha, \gamma))$ een $(\Omega, (\alpha, \gamma))$ -horizonfunctie op X is m.b.t. d . (HF.1) en (HF.2) volgen direct uit de definitie van $\mathbb{G}_d(\Omega, (\alpha, \gamma))$. Stel (x, y) in X^2 . Als $d(\Omega, x) \leq d(\Omega, y)$ kunnen zich drie mogelijke situaties voordoen:

- Als $d(\Omega, x) \leq \alpha$ dan $f(x) = 1 \geq f(y)$.
- Als $d(\Omega, y) \geq \gamma$ dan $f(y) = 0 \leq f(x)$.
- Als $\alpha < d(\Omega, x) \leq d(\Omega, y) < \gamma$ dan

$$\frac{\gamma - d(\Omega, x)}{\gamma - \alpha} \geq \frac{\gamma - d(\Omega, y)}{\gamma - \alpha}$$

en dus $f(x) \geq f(y)$,

waaruit (HF.3). Om (HG.2) aan te tonen, stel (α_1, γ_1) en (α_2, γ_2) in $\mathbb{V}$. Bij definitie is dus $\alpha_1 < \gamma_1$ en $\alpha_2 < \gamma_2$. Wegens het gegeven $\alpha_1 \leq \alpha_2$ en $\gamma_1 \leq \gamma_2$ zijn er dus 2 mogelijkheden :

- (i) $\alpha_1 < \gamma_1 \leq \alpha_2 < \gamma_2$
- (ii) $\alpha_1 \leq \alpha_2 < \gamma_1 \leq \gamma_2$

We bewijzen nu dat in elk van deze gevallen voor $f_1 = \mathbb{G}_d(\Omega, (\alpha_1, \gamma_1))$ en $f_2 = \mathbb{G}_d(\Omega, (\alpha_2, \gamma_2))$ geldt dat

$$(\forall x \in X)(f_1(x) \leq f_2(x))$$

In situatie (i) hebben we voor $x \in X$ ofwel $d(\Omega, x) \leq \alpha_2$ ofwel $d(\Omega, x) \geq \gamma_1$ (ofwel beide). Dus ofwel $f_2(x) = 1 \geq f_1(x)$ ofwel $f_1(x) = 0 \leq f_2(x)$. Analoog hebben we in situatie (ii) voor alle $x \in X$ ofwel $d(\Omega, x) \leq \alpha_2$ ofwel $d(\Omega, x) \geq \gamma_1$ ofwel $\alpha_2 < d(\Omega, x) < \gamma_1$. Als $d(\Omega, x) \leq \alpha_2$ dan $f_2(x) = 1 \geq f_1(x)$. Als $d(\Omega, x) \geq \gamma_1$ dan $f_1(x) = 0 \leq f_2(x)$. Als $\alpha_1 \leq \alpha_2 < d(\Omega, x) < \gamma_1 \leq \gamma_2$ dan is het bewijs voor $f_1(x) \leq f_2(x)$ iets ingewikkelder:

- Als $\gamma_2 - \alpha_2 \geq \gamma_1 - \alpha_1$ dan

$$\begin{aligned} \alpha_2 < \gamma_2 &\Rightarrow \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) \leq \gamma_2(\alpha_2 - \alpha_1) \\ &\Rightarrow \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_1 \leq \gamma_2\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 \\ &\Rightarrow \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_1 + \alpha_2\gamma_1 \leq \gamma_2\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 + \alpha_2\gamma_1 \\ &\Rightarrow \alpha_2((\gamma_2 - \alpha_2) - (\gamma_1 - \alpha_1)) \geq \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \end{aligned}$$

Aangezien $d(\Omega, x) > \alpha_2 \geq 0$ and $(\gamma_2 - \alpha_2) - (\gamma_1 - \alpha_1) \geq 0$ geldt dus

$$d(\Omega, x)((\gamma_2 - \alpha_2) - (\gamma_1 - \alpha_1)) \geq \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1$$

wat gelijkwaardig is met $f_1(x) \leq f_2(x)$.

- Als $\gamma_2 - \alpha_2 < \gamma_1 - \alpha_1$ dan

$$\begin{aligned} \alpha_1 < \gamma_1 &\Rightarrow \alpha_1(\gamma_2 - \gamma_1) \leq \gamma_1(\gamma_2 - \gamma_1) \\ &\Rightarrow \alpha_1\gamma_2 - \alpha_1\gamma_1 \leq \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1^2 \\ &\Rightarrow \alpha_1\gamma_2 - \alpha_1\gamma_1 + \gamma_1\alpha_2 \leq \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1^2 + \gamma_1\alpha_2 \\ &\Rightarrow \gamma_1((\gamma_2 - \alpha_2) - (\gamma_1 - \alpha_1)) \geq \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \end{aligned}$$

Aangezien $0 \leq d(\Omega, x) < \gamma_1$ and $(\gamma_2 - \alpha_2) - (\gamma_1 - \alpha_1) < 0$ geldt dus

$$d(\Omega, x)((\gamma_2 - \alpha_2) - (\gamma_1 - \alpha_1)) \geq \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1$$

wat gelijkwaardig is met $f_1(x) \leq f_2(x)$. $\square$

6.7. Eigenschap. Stel (X, d) een pseudo-metrische ruimte. De $(X \times \mathbb{V})$ - $\mathcal{F}(X)$ afbeelding $\mathbb{F}_d$ gedefinieerd als

$$\mathbb{F}_d(\Omega, (\alpha, \gamma))(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } d(\Omega, x) \leq \alpha \\ 1 - \frac{2(\alpha - d(\Omega, x))^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{als } \alpha \leq d(\Omega, x) \leq \frac{\alpha + \gamma}{2} \\ \frac{2(\gamma - d(\Omega, x))^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{als } \frac{\alpha + \gamma}{2} \leq d(\Omega, x) \leq \gamma \\ 0, & \text{als } \gamma \leq d(\Omega, x) \end{cases}$$

voor alle Ω in X en (α, γ) in $\mathbb{V}$, voor alle x in X , is een horizongenerator op X m.b.t. d .

Bewijs. Het bewijs verloopt in grote lijnen analoog als dat van Eigenschap 6.6, maar aangezien de definitie van $\mathbb{F}_d$ uit 4 componenten bestaat (waar er bij $\mathbb{G}_d$ maar 3 waren), is er soms een uitgesplitster gevallenonderzoek vereist. We merken op voorhand op dat voor alle x zo dat $\alpha \leq d(\Omega, x) \leq \frac{\alpha + \gamma}{2}$ geldt dat

$$\mathbb{F}_d(\Omega, (\alpha, \gamma))(x) \geq \frac{1}{2}$$

Uit $d(\Omega, x) \leq \frac{\alpha + \gamma}{2}$ volgt immers

$$\alpha - d(\Omega, x) \geq \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

en wegens het dalend karakter van $\cdot^2$ in $] -\infty, 0]$

$$(\alpha - d(\Omega, x))^2 \leq \left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)^2$$

waaruit

$$1 - \frac{2(\alpha - d(\Omega, x))^2}{(\gamma - \alpha)^2} \geq 1 - \frac{2(\gamma - \alpha)^2}{4(\gamma - \alpha)^2}$$

Op analoge manier kan aangetoond worden dat voor alle x zo dat $\frac{\alpha+\gamma}{2} \leq d(\Omega, x) \leq \gamma$ geldt dat

$$\mathbb{F}_d(\Omega, (\alpha, \gamma))(x) \leq \frac{1}{2}$$

Eerst tonen we aan dat $f = \mathbb{F}_d(\Omega, (\alpha, \gamma))$ een horizonfunctie op X is m.b.t. d . (HF.1) en (HF.2) volgen weer onmiddellijk uit de definitie van $\mathbb{F}_d$. Wat betreft (HF.3) onderscheiden we naast de eenvoudige gevallen $d(\Omega, x) \leq \alpha$ en $d(\Omega, y) \geq \gamma$ nog 3 andere gevallen, nl.

- $\alpha < d(\Omega, x) \leq d(\Omega, y) \leq \frac{\alpha+\gamma}{2}$
In dit geval volgt uit $d(\Omega, x) \leq d(\Omega, y)$ dat $\alpha - d(\Omega, x) \geq \alpha - d(\Omega, y)$.
Wegens het dalend karakter van $\cdot^2$ in $] -\infty, 0]$ geldt dus

$$(\alpha - d(\Omega, x))^2 \leq (\alpha - d(\Omega, y))^2$$

waaruit

$$1 - \frac{2(\alpha - d(\Omega, x))^2}{(\gamma - \alpha)^2} \geq 1 - \frac{2(\alpha - d(\Omega, y))^2}{(\gamma - \alpha)^2}$$

m.a.w. $f(x) \geq f(y)$.

- $\alpha < d(\Omega, x) \leq \frac{\alpha+\gamma}{2} < d(\Omega, y) < \gamma$
Hier beroepen we ons op het feit dat $f(x) \geq \frac{1}{2} \geq f(y)$.
- $\frac{\alpha+\gamma}{2} < d(\Omega, x) \leq d(\Omega, y) < \gamma$
Uit $d(\Omega, x) \leq d(\Omega, y)$ volgt $\gamma - d(\Omega, x) \geq \gamma - d(\Omega, y)$ en o.m. wegens het stijgend karakter van $\cdot^2$ in $[0, +\infty[$ dat

$$\frac{2(\gamma - d(\Omega, x))^2}{(\gamma - \alpha)^2} \geq \frac{2(\gamma - d(\Omega, y))^2}{(\gamma - \alpha)^2}$$

en dus $f(x) \geq f(y)$.

Om (HG.2) te bewijzen, merken we weer op dat er zich wat betreft de gezichtsvermogens (α_1, γ_1) en (α_2, γ_2) de volgende twee situaties kunnen voordoen:

- (i) $\alpha_1 < \gamma_1 \leq \alpha_2 < \gamma_2$
- (ii) $\alpha_1 \leq \alpha_2 < \gamma_1 \leq \gamma_2$

Stel $f_1 = \mathbb{F}_d(\Omega, (\alpha_1, \gamma_1))$ en $f_2 = \mathbb{F}_d(\Omega, (\alpha_2, \gamma_2))$. In geval (i) verloopt het bewijs volledig analoog aan dat van Eigenschap 6.6. Ook voor geval (ii) als $d(\Omega, x) \leq \alpha_2$ of $d(\Omega, x) \geq \gamma_1$ kunnen we de bewijsvoering overnemen. Bij Eigenschap 6.6 moesten we daarnaast nog 1 ander deelgeval beschouwen; voor $\mathbb{F}_d$ zijn er echter nog 3 andere mogelijkheden. Wegens $\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \leq \frac{\alpha_2+\gamma_2}{2}$ gaat het om

- $\alpha_2 < d(\Omega, x) \leq \frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}$
In dit geval moeten we aantonen dat

$$1 - \frac{2(\alpha_1 - d(\Omega, x))^2}{(\gamma_1 - \alpha_1)^2} \leq 1 - \frac{2(\alpha_2 - d(\Omega, x))^2}{(\gamma_2 - \alpha_2)^2}$$

Aangezien $\alpha_1 - d(\Omega, x) < 0$ en $\alpha_2 - d(\Omega, x) < 0$ volstaat het om aan te tonen dat

$$\frac{\alpha_1 - d(\Omega, x)}{\gamma_1 - \alpha_1} \leq \frac{\alpha_2 - d(\Omega, x)}{\gamma_2 - \alpha_2}$$

wat zou volgen uit

$$d(\Omega, x)((\gamma_2 - \alpha_2) - (\gamma_1 - \alpha_1)) \geq \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1$$

We kunnen dezelfde bewijsvoering als bij Eigenschap 6.6 gebruiken om aan te tonen dat deze ongelijkheid geldig is.

- $\frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} < d(\Omega, x) \leq \frac{\alpha_2 + \gamma_2}{2}$
Hier beroepen we ons op $f_1(x) \leq \frac{1}{2} \leq f_2(x)$.
- $\frac{\alpha_2 + \gamma_2}{2} < d(\Omega, x) < \gamma_1$
Wegens $\gamma_1 - d(\Omega, x) > 0$ en $\gamma_2 - d(\Omega, x) > 0$ zou het gestelde volgen uit

$$\frac{\gamma_1 - d(\Omega, x)}{\gamma_1 - \alpha_1} \leq \frac{\gamma_2 - d(\Omega, x)}{\gamma_2 - \alpha_2}$$

wat opnieuw kan afgeleid worden uit

$$d(\Omega, x)((\gamma_2 - \alpha_2) - (\gamma_1 - \alpha_1)) \geq \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1$$

□

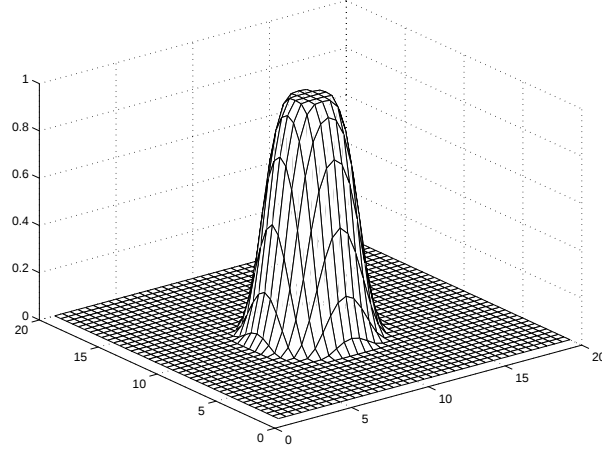
6.8. Voorbeeld. Wanneer het pad in het inleidend voorbeeld eindig is en uit 100 tegels bestaat, dan is het universum $X = \{0, 1, 2, \dots, 99\}$. Voor alle $x \in X$ en $y \in X$ is $d_{|\cdot|}(x, y)$ het aantal stappen dat men moet nemen om van de tegel met nummer x naar de tegel met nummer y te gaan. De zichtbaarheid van tegel x voor een waarnemer die staat op tegel 0 is dan, gebruik makend van horizongenerator $\mathbb{G}_{d_{|\cdot|}}$,

$$\mathbb{G}_{d_{|\cdot|}}(0, (5, 20))(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \leq 5 \\ \frac{20-x}{15}, & \text{als } 5 < x < 20 \\ 0, & \text{als } 20 \leq x \end{cases}$$

waarin we het complement van een lineaire lidmaatschapsfunctie $\text{LIN}(\cdot; 5, 20)$ herkennen (zie Hoofdstuk 3).

6.9. Voorbeeld. Stel $X = \mathbb{R}$ en $d = d_{|\cdot|}$. Voor Ω in $\mathbb{R}$ en $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{V}$:

$$\mathbb{G}_{d_{|\cdot|}}(\Omega, (\alpha, \gamma))(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \in [\Omega - \alpha, \Omega + \alpha] \\ \frac{x - \Omega + \gamma}{\gamma - \alpha}, & \text{als } x \in]\Omega - \gamma, \Omega - \alpha[\\ \frac{x - \Omega - \gamma}{\alpha - \gamma}, & \text{als } x \in]\Omega + \alpha, \Omega + \gamma[\\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$



Figuur 6.2: Een horizonfunctie in $[1, 20] \times [1, 20]$. De waarnemer bevindt zich op $(10, 10)$ en heeft gezichtsvermogen $(1, 4)$.

6.10. Voorbeeld. Stel $X = \mathbb{R}$ en $d = d_{|\cdot|}$. Voor Ω in $\mathbb{R}$ en $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{V}$:

$$\mathbb{F}_{d_{|\cdot|}}(\Omega, (\alpha, \gamma))(x) = \begin{cases} \frac{2(\gamma - \Omega + x)^2}{(\gamma - \alpha)^2} & \text{als } x \in [\Omega - \gamma, \Omega - \frac{\alpha + \gamma}{2}] \\ 1 - \frac{2(\alpha - \Omega + x)^2}{(\gamma - \alpha)^2} & \text{als } x \in [\Omega - \frac{\alpha + \gamma}{2}, \Omega - \alpha] \\ 1, & \text{als } x \in [\Omega - \alpha, \Omega + \alpha] \\ 1 - \frac{2(\alpha + \Omega - x)^2}{(\gamma - \alpha)^2} & \text{als } x \in [\Omega + \alpha, \Omega + \frac{\alpha + \gamma}{2}] \\ \frac{2(\gamma + \Omega - x)^2}{(\gamma - \alpha)^2} & \text{als } x \in [\Omega + \frac{\alpha + \gamma}{2}, \Omega + \gamma] \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

Men gaat gemakkelijk na dat voor $X = \mathbb{R}$, $\mathbb{G}_{d_{|\cdot|}}(\Omega, (\alpha, \gamma))$ niets anders is dan $\text{TRAPEZ}(\cdot; \Omega - \gamma, \Omega - \alpha, \Omega + \alpha, \Omega + \gamma)$. Bovendien is $\mathbb{F}_{d_{|\cdot|}}(\Omega, (\alpha, \gamma))$ hetzelfde als $\pi(\cdot; \Omega - \gamma, \Omega - \alpha, \Omega + \alpha, \Omega + \gamma)$. De horizonfuncties die door $\mathbb{G}_d$ en $\mathbb{F}_d$ voortgebracht worden kunnen dus beschouwd worden als veralgemeningen van de typische lidmaatschapsfuncties uit Hoofdstuk 3, waarbij het universum niet noodzakelijk meer (een deelverzameling van) $\mathbb{R}$ is, maar de basisverzameling van een willekeurige metrische ruimte mag zijn. De volgende voorbeelden illustreren dit.

6.11. Voorbeeld. Stel $X = [1, 20] \times [1, 20]$. Een veel gebruikte metriek voor dit universum is de euclidische metriek $d^{(2)}$. De zichtbaarheid van de elementen van X voor een waarnemer op observatiepunt $\Omega = (10, 10)$ met gezichtsvermogen $(\alpha, \gamma) = (1, 4)$ kan dan b.v. gegeven worden door de horizonfunctie $\mathbb{F}_{d^{(2)}}((10, 10), (1, 4))$ afgebeeld in Figuur 6.2.

6.12. Voorbeeld. Zoals reeds besproken in Hoofdstuk 5 kunnen we het universum van de sprookjesfiguren voorzien van een metriek, zoals de metriek d_s ,

d_s	Assepoester	Sneeuwwitje	Prins	Roodkapje	Dwerg	Heks	Wolf	Trol
Assepoester	0	1	2	3	5	7	8	10
Sneeuwwitje	1	0	1	2	4	6	7	9
Prins	2	1	0	1	3	5	6	8
Roodkapje	3	2	1	0	2	4	5	7
Dwerg	5	4	3	2	0	2	3	5
Heks	7	6	5	4	2	0	1	3
Wolf	8	7	6	5	3	1	0	2
Trol	10	9	8	7	5	3	2	0

Tabel 6.1: Metriek in het universum van de sprookjesfiguren

weergegeven in Tabel 6.1, die de afstand m.b.t. schoonheid tussen de verschillende sprookjesfiguren uitdrukt. Een voorbeeld van een horizonfunctie in dit universum is de afbeelding

$$f = \mathbb{G}_{d_s}(\text{Trol}, (1, 5))$$

Men gaat na dat

$$\begin{aligned} f(\text{Assepoester}) &= 0.00 & f(\text{Sneeuwwitje}) &= 0.00 \\ f(\text{Prins}) &= 0.00 & f(\text{Roodkapje}) &= 0.00 \\ f(\text{Dwerg}) &= 0.00 & f(\text{Heks}) &= 0.50 \\ f(\text{Wolf}) &= 0.75 & f(\text{Trol}) &= 1.00 \end{aligned}$$

De horizonfuncties die voor een welbepaald gezichtsvermogen voortgebracht worden door $\mathbb{G}_d$ en $\mathbb{F}_d$, kunnen geïnterpreteerd worden als de voorverzamelingen van gelijkaardigheidsrelaties op X . Meer bepaald als (α, γ) een gezichtsvermogen is, dan zijn de vaagrelaties R_1 en R_2 op X bepaald door

$$R_1(x, y) = \mathbb{G}_d(x, (\alpha, \gamma))(y)$$

$$R_2(x, y) = \mathbb{F}_d(x, (\alpha, \gamma))(y)$$

gelijkaardigheidsrelaties m.b.t. d . Dit geldt echter niet algemeen voor een willekeurige horizonsgenerator. De reden is dat er vanuit de definitie van horizonfunctie wel opgelegd wordt dat de zichtbaarheid moet dalen met groeiende afstand, maar dat er vanuit de definitie van horizonsgenerator geen eisen worden opgelegd m.b.t. het verschil in zichtbaarheid vanuit verschillende observatiepunten. Om dit illustreren beschouwen we de metrische ruimte $([0, 1], d_{|\cdot|})$ en de horizonsgenerator

$$\mathbb{H}(\Omega, (\alpha, \gamma))(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } d_{|\cdot|}(\Omega, x) \leq \alpha \\ \Omega, & \text{als } \alpha < d_{|\cdot|}(\Omega, x) < \gamma \\ 0, & \text{als } \gamma \leq d_{|\cdot|}(\Omega, x) \end{cases}$$

Men gaat eenvoudig na dat het hier wel degelijk om een horzongenerator gaat: eerst en vooral voldoen de voorgebrachte functies aan Definitie 6.2. Om (HG.2) uit Definitie 6.5 na te gaan, controleren we nog het niet-triviale geval waarmee we reeds vertrouwd zijn uit de bewijzen van Eigenschappen 6.6 en 6.7, nl. $\alpha_2 < d(\Omega, x) < \gamma_1$. Uit de definitie van $\mathbb{H}$ zien we onmiddellijk dat dan $\mathbb{H}(\Omega, (\alpha_1, \gamma_1))(x) = \Omega = \mathbb{H}(\Omega, (\alpha_2, \gamma_2))(x)$. Van een gelijkaardigheidsrelatie R op het universum $[0, 1]$ voorzien van de metriek $d_{|\cdot|}$ verwachten we o.m. $R(0.9, 0.2) \leq R(0.1, 0.2)$ en wel omdat $d_{|\cdot|}(0.9, 0.2) \geq d_{|\cdot|}(0.1, 0.2)$. Er geldt echter $\mathbb{H}(0.9, (0, 1))(0.2) = 0.9$ en $\mathbb{H}(0.1, (0, 1))(0.2) = 0.1$. We kunnen wel een voldoende voorwaarde opstellen voor het bestaan van een verband tussen horzongeneratoren en gelijkaardigheidsrelaties.

6.13. Eigenschap. Stel (X, d) een pseudo-metrische ruimte, $\mathbb{H}$ een horzongenerator op X , en (α, γ) in $\mathbb{V}$. Indien er een dalende $\mathbb{R}^+ - [0, 1]$ afbeelding f bestaat zo dat

$$\mathbb{H}(\Omega, (\alpha, \gamma))(x) = f(d(\Omega, x))$$

voor alle Ω en x in X , dan is de vaagrelatie R gedefinieerd als

$$R(x, y) = \mathbb{H}(x, (\alpha, \gamma))(y)$$

voor alle x en y in X , een gelijkaardigheidsrelatie op X m.b.t. d .

Bewijs. De reflexiviteit van R volgt uit de definitie van horizonfunctie en de definitie van pseudo-metriek. Bovendien volgt voor iedere x, y, z en u in X uit $d(x, y) \leq d(z, u)$ dat $f(d(x, y)) \geq f(d(z, u))$, waaruit het gestelde. $\square$

6.14. Gevolg. Zij (X, d) een metrische ruimte en (α, γ) in $\mathbb{V}$ een gezichtsvermogen. De vaagrelaties R_1 en R_2 op X gedefinieerd als

$$R_1(x, y) = \mathbb{G}_d(x, (\alpha, \gamma))(y)$$

$$R_2(x, y) = \mathbb{F}_d(x, (\alpha, \gamma))(y)$$

voor alle x en y in X , zijn gelijkaardigheidsrelaties op X m.b.t. d .

Bewijs. Uit Eigenschap 6.13 waarbij voor R_1 als dalende $\mathbb{R}^+ - [0, 1]$ afbeelding $co_{N_s}(\text{LIN}(\cdot; \alpha, \gamma))$ kan gekozen worden, terwijl voor R_2 een beroep kan gedaan worden op $co_{N_s}(S(\cdot; \alpha, \gamma))$. $\square$

In de volgende secties zullen we aangeven hoe de formele hulpmiddelen geïntroduceerd in deze sectie kunnen gebruikt worden voor de representatie van (gewijzigde) linguïstische termen. We vertrekken daarbij zoals in het begin van deze sectie telkens van het voorbeeld van het pad met genummerde tegels.

6.3 Inclusieve interpretatie

Beelden we ons opnieuw in dat we aan het begin van het pad staan. We zouden kunnen zeggen dat de nummers op de tegels die we duidelijk zien (de eerste 6

tegels) zeker klein zijn. De nummers op de tegels die we helemaal niet kunnen zien (te beginnen vanaf de 21ste tegel) zijn zeker niet klein. De “kleinheid” van de nummers op de andere tegels kan beschouwd worden als zijnde in verhouding met de zichtbaarheid van die tegels. We stellen m.a.w. voor om een $(0, 5, 20)$ -horizonfunctie (m.b.t. $d_{|\cdot|}$) te gebruiken als lidmaatschapsfunctie voor klein. In termen van een horizongenerator $\mathbb{H}$

$$\text{klein} = \mathbb{H}(0, (5, 20))$$

Om groot op dezelfde manier te modelleren, veronderstellen we dat het pad eindig is. Wanneer de laatste tegel nummer 99 draagt, dan

$$\text{groot} = \mathbb{H}(99, (5, 20))$$

De lidmaatschapsfunctie van gemiddeld kan gedefinieerd worden als

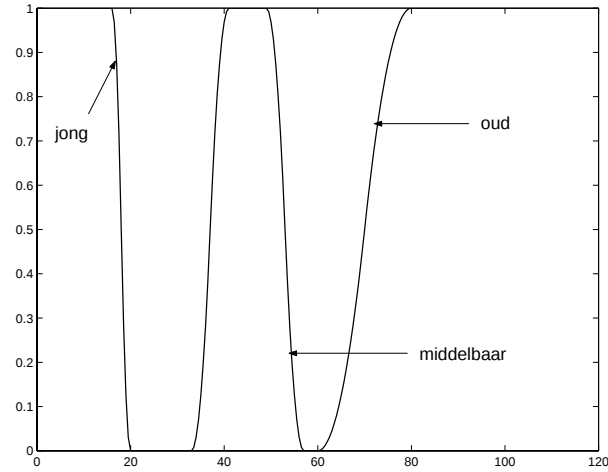
$$\text{gemiddeld} = \mathbb{H}(49, (5, 20))$$

Algemeen is een eerste vereiste voor de representatie van de driedeling van een linguïstische veranderlijke in een universum X , dat X kan uitgerust worden met een pseudo-metrick d die correspondeert met het concept dat men wil modelleren. Wanneer men mooi wil representeren moet deze pseudo-metrick de afstand in schoonheid uitdrukken, wanneer men goedkoop wil modelleren moet deze pseudo-metrick het verschil in prijs uitdrukken, wanneer het gaat om slecht moet deze pseudo-metrick de afstand in kwaliteit uitdrukken enz. Als zo’n pseudo-metrick d voorhanden is, dan gebruiken we een horizongenerator $\mathbb{H}$ m.b.t. d en 3 gezichtsvermogens (α_1, γ_1) , (α_2, γ_2) en (α_3, γ_3) in $\mathbb{V}$, en wel op de volgende manier:

Term	Vaagverzameling
primaire term	$\mathbb{H}(\Omega_1, (\alpha_1, \gamma_1))$
antonien	$\mathbb{H}(\Omega_2, (\alpha_2, \gamma_2))$
gemiddelde term	$\mathbb{H}(\Omega_3, (\alpha_3, \gamma_3))$

Hierin is Ω_1 het element van X dat het best voldoet aan de primaire term, Ω_2 het element van X dat het best voldoet aan het antonien en Ω_3 het element van X dat het best voldoet aan de gemiddelde term. Een hulpmiddel dat kan gehanteerd worden voor het vinden van het best voldoende element, is te stellen dat x best voldoet aan een term t als men kan zeggen “ x is het t -ste”. Zo is 0 het kleinste tegelnummer, Ewan McGregor de knapste acteur uit “Lipstick on your collar”, wiskunde het grootste struikelblok voor de eerste kandidatuur informatica,... Wanneer er meer dan één element is dat best voldoet aan een term, dan kan men verwachten dat deze elementen niet ver van elkaar liggen, zodat een willekeurige keuze weinig effect zal hebben op de resulterende horizonfunctie. Eventueel kan men ook voor elk van de elementen een horizonfunctie creëren en daarvan de unie nemen.

6.15. Voorbeeld. De betekenis van oud, jong en van middelbare leeftijd in het universum $X = [0, 120]$ van leeftijden (uitgedrukt in jaren) kan gerepresenteerd



Figuur 6.3: Lidmaatschapsfuncties voor oud, jong en middelbaar

	mooi	doorsnee	lelijk
Assepoester	1.00	0.00	0.00
Sneeuwwitje	1.00	0.25	0.00
Prins	0.75	0.50	0.00
Roodkapje	0.50	0.75	0.00
Dwerg	0.00	1.00	0.00
Heks	0.00	0.75	0.50
Wolf	0.00	0.50	0.75
Trol	0.00	0.00	1.00

Tabel 6.2: Lidmaatschapsgraden van vaagverzamelingen in het universum van de sprookjesfiguren

worden m.b.v. de horizongenerator $\mathbb{G}_{d_{l,l}}$, b.v. als volgt: $\text{oud} = \mathbb{F}_{d_{l,l}}(120, (40, 60))$, $\text{jong} = \mathbb{F}_{d_{l,l}}(0, (16, 20))$, $\text{middelbaar} = \mathbb{F}_{d_{l,l}}(45, (4, 12))$. De resulterende lidmaatschapsfuncties zijn afgebeeld in Figuur 6.3.

6.16. Voorbeeld. De betekenis van mooi, lelijk en doorsnee in het universum X van de sprookjesfiguren kan gerepresenteerd worden m.b.v. de horizongenerator $\mathbb{G}_{d_s}$ waarbij de metriek d_s gedefinieerd werd in Voorbeeld 6.12. Een mogelijke representatie is: $\text{mooi} = \mathbb{G}_{d_s}(\text{Assepoester}, (1, 5))$, $\text{lelijk} = \mathbb{G}_{d_s}(\text{Trol}, (1, 5))$, $\text{doorsnee} = \mathbb{G}_{d_s}(\text{Dwerg}, (1, 5))$. De waarden van de resulterende lidmaatschapsgraden zijn weergegeven in Tabel 6.2.

Beelden we ons in dat we weer op tegel 0 staan. We nemen nu onze bril af. Plots verandert de zichtbaarheid van de tegels die voor ons liggen¹. We hebben

¹De zichtbaarheid zou slechter moeten worden. Indien dit niet het geval is, controleren we

nu een nieuw gezichtsvermogen (α_1, γ_1) zo dat $\alpha_1 \leq \alpha$ en $\gamma_1 \leq \gamma$ (waarbij (α, γ) ons oorspronkelijke gezichtsvermogen was). De nummers die we zelfs zonder je bril nog kunnen lezen, moeten zeer dicht bij ons zijn, d.w.z. ze moeten zeer klein zijn. We definiëren de lidmaatschapsfunctie van zeer klein dan ook als volgt:

$$\text{zeer klein} = \mathbb{H}(0, (\alpha_1, \gamma_1))$$

Zetten we nu onze bril opnieuw op, en nemen we er een verrekijker bij. We krijgen op die manier een nieuw gezichtsvermogen (α_2, γ_2) zo dat $\alpha \leq \alpha_2$ en $\gamma \leq \gamma_2$. Alle nummers die we kunnen lezen met onze bril en de hulp van een verrekijker kunnen beschouwd worden als tamelijk klein. We definiëren dan ook

$$\text{tamelijk klein} = \mathbb{H}(0, (\alpha_2, \gamma_2))$$

Een sterkere versie van bovenstaand verhaal kan herhaald worden voor extreem klein en een beetje klein. Algemeen veronderstellen we weer dat het universum X kan uitgerust worden met een pseudo-metrick d die verband houdt met het concept dat we willen modelleren. M.b.v. een horizongenerator $\mathbb{H}$ op X , (α, γ) , (α_1, γ_1) , (α_2, γ_2) , (α_3, γ_3) , en (α_4, γ_4) in $\mathbb{V}$, kunnen we een term t en de ervan afgeleide gewijzigde termen nu voorstellen als volgt:

Term	Vaagverzameling	Voorwaarden
t	$\mathbb{H}(\Omega, (\alpha, \gamma))$	
zeer t	$\mathbb{H}(\Omega, (\alpha_1, \gamma_1))$	$\alpha_1 \leq \alpha, \gamma_1 \leq \gamma$
tamelijk t	$\mathbb{H}(\Omega, (\alpha_2, \gamma_2))$	$\alpha \leq \alpha_2, \gamma \leq \gamma_2$
extreem t	$\mathbb{H}(\Omega, (\alpha_3, \gamma_3))$	$\alpha_3 \leq \alpha_1, \gamma_3 \leq \gamma_1$
een beetje t	$\mathbb{H}(\Omega, (\alpha_4, \gamma_4))$	$\alpha_2 \leq \alpha_4, \gamma_2 \leq \gamma_4$

waarin Ω het element is van X dat het best voldoet aan t .

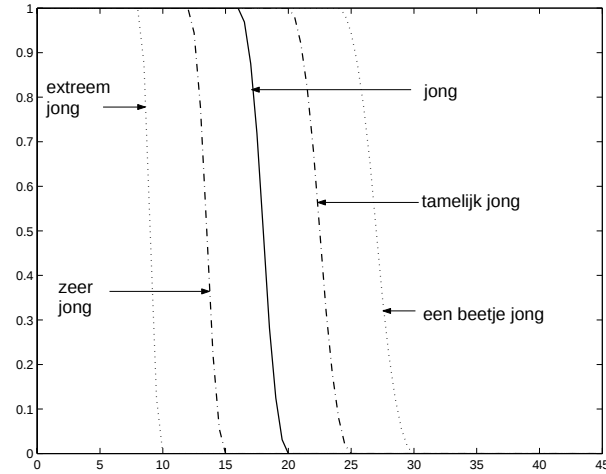
6.17. Voorbeeld. In het universum van leeftijden stellen we de volgende representaties voor

Term	Vaagverzameling
t	$\mathbb{F}_{d_{ \cdot }}(\Omega, (\alpha, \gamma))$
zeer t	$\mathbb{F}_{d_{ \cdot }}(\Omega, (\frac{3}{4}\alpha, \frac{3}{4}\gamma))$
tamelijk t	$\mathbb{F}_{d_{ \cdot }}(\Omega, (\frac{5}{4}\alpha, \frac{5}{4}\gamma))$
extreem t	$\mathbb{F}_{d_{ \cdot }}(\Omega, (\frac{2}{4}\alpha, \frac{2}{4}\gamma))$
een beetje t	$\mathbb{F}_{d_{ \cdot }}(\Omega, (\frac{6}{4}\alpha, \frac{6}{4}\gamma))$

waarbij we voor de waarden van Ω , α en γ verwijzen naar Voorbeeld 6.15. In Figuur 6.4 wordt dit geïllustreerd voor jong.

6.18. Voorbeeld. Voor de gewijzigde termen in het universum van de sprook-

of we wel onze eigen bril op hebben.



Figuur 6.4: Lidmaatschapsfuncties voor jong en gewijzigde termen (inclusieve interpretatie)

jesfiguren stellen we voor:

Term	Vaagverzameling
t	$\mathbb{G}_{d_s}(\Omega, (1, 5))$
zeer t	$\mathbb{G}_{d_s}(\Omega, (0, 4))$
tamelijk t	$\mathbb{G}_{d_s}(\Omega, (1, 5))$
extreem t	$\mathbb{G}_{d_s}(\Omega, (0, 3))$
ruwweg t	$\mathbb{G}_{d_s}(\Omega, (3, 7))$

waarbij we voor de waarde van Ω verwijzen naar Voorbeeld 6.16. In Tabel 6.3 wordt dit geïllustreerd voor mooi (met $\Omega = \text{Assepoeester}$).

6.4 Niet-inclusieve interpretatie

Beelden we ons nog één keer in dat we aan het begin van het pad staan, d.w.z. op tegel 0. Er is mist, dus ons gezichtsvermogen is klein (b.v. $(\alpha, \gamma) = (1, 4)$). 0 is het meest gepaste voorbeeld voor de term *extreem klein*. De nummers die we ondanks de mist nog steeds kunnen lezen terwijl we op tegel 0 staan, zijn ook in zekere mate gepast voor *extreem klein*. M.a.w.

$$\text{extreem klein} = \mathbb{H}(0, (1, 4))$$

Nu beginnen we te wandelen (joepie, eindelijk mogen we van tegel 0 af!) in de richting van tegel 1. Na een aantal tegels (b.v. op de 5de tegel) stoppen we en kijken we rond. Alle nummers die we nu kunnen zien zijn gepaste voorbeelden

	extreem mooi	zeer mooi	mooi	tamelijk mooi	een beetje mooi
Assepoester	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Sneeuwwitje	0.67	0.75	1.00	1.00	1.00
Prins	0.33	0.50	0.75	1.00	1.00
Roodkapje	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Dwerg	0.00	0.00	0.00	0.25	0.60
Heks	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20
Wolf	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Trol	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabel 6.3: Lidmaatschapsgraden voor mooi en gewijzigde termen (inclusieve interpretatie)

voor zeer klein. We definiëren dan ook

$$\text{zeer klein} = \mathbb{H}(5, (1, 4))$$

Dan vervolgen we onze weg. Opnieuw doen we 5 passen en stoppen we om even uit te rusten. De nummers die we nu kunnen zien terwijl we rondkijken, zijn gepast voor klein.

$$\text{klein} = \mathbb{H}(10, (1, 4))$$

We kunnen dit nu nog tweemaal herhalen

$$\text{tamelijk klein} = \mathbb{H}(15, (1, 4))$$

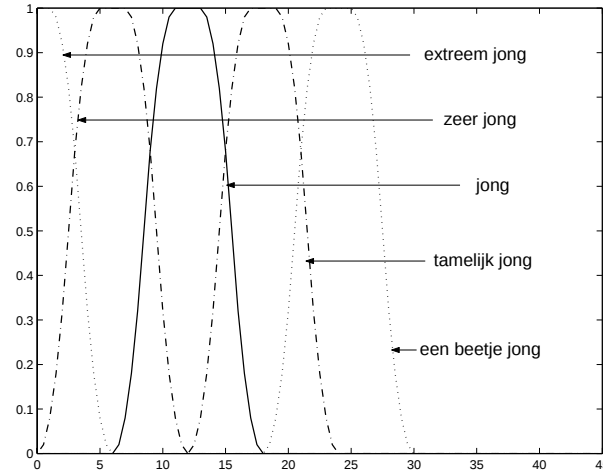
$$\text{een beetje klein} = \mathbb{H}(20, (1, 4))$$

Algemeen veronderstellen we weer dat (X, d) een pseudo-metrische ruimte is, waarbij d verband houdt met de te modelleren linguïstische termen. We gebruiken opnieuw een horizonsgenerator $\mathbb{H}$ en een gezichtsvermogen (α, γ) in $\mathbb{V}$, als volgt:

Term	Vaagverzameling
extreem t	$\mathbb{H}(\Omega_1, (\alpha, \gamma))$
zeer t	$\mathbb{H}(\Omega_2, (\alpha, \gamma))$
t	$\mathbb{H}(\Omega_3, (\alpha, \gamma))$
tamelijk t	$\mathbb{H}(\Omega_4, (\alpha, \gamma))$
een beetje t	$\mathbb{H}(\Omega_5, (\alpha, \gamma))$

waarbij Ω_1 het element van X is dat het meest geschikt is voor extreem t , Ω_2 het element van X is dat het meest geschikt is voor zeer t , Ω_3 het element van X is dat het meest geschikt is voor t , Ω_4 het element van X is dat het meest geschikt is voor tamelijk t en Ω_5 het element van X is dat het meest geschikt is voor een beetje t .

6.19. Voorbeeld. In het universum van de leeftijden $X = [0, 120]$ stellen we voor de niet-inclusieve interpretatie van de gewijzigde termen afgeleid van



Figuur 6.5: Lidmaatschapsfuncties voor jong en gewijzigde termen (niet-inclusieve interpretatie)

mooi voor: $\text{extreem jong} = \mathbb{F}_{d_{l,l}}(0, (1, 6))$, $\text{zeer jong} = \mathbb{F}_{d_{l,l}}(6, (1, 6))$, $\text{jong} = \mathbb{F}_{d_{l,l}}(12, (1, 6))$, $\text{tamelijk jong} = \mathbb{F}_{d_{l,l}}(18, (1, 6))$ en $\text{een beetje jong} = \mathbb{F}_{d_{l,l}}(24, (1, 6))$. De resulterende lidmaatschapsfuncties zijn afgebeeld in Figuur 6.5.

6.20. Voorbeeld. Tenslotte keren we nog eens terug naar het universum van de sprookjesfiguren (zie Voorbeeld 6.16). In de niet-inclusieve interpretatie kunnen de gewijzigde termen afgeleid van mooi voorgesteld worden door $\text{extreem mooi} = \mathbb{G}_{d_s}(\text{Assepoester}, (0, 3))$, $\text{zeer mooi} = \mathbb{G}_{d_s}(\text{Sneeuwwitje}, (0, 3))$, $\text{mooi} = \mathbb{G}_{d_s}(\text{Prins}, (0, 3))$, $\text{tamelijk mooi} = \mathbb{G}_{d_s}(\text{Roodkapje}, (0, 3))$ en $\text{een beetje mooi} = \mathbb{G}_{d_s}(\text{Dwerg}, (0, 3))$. De resulterende lidmaatschapsgraden worden weergegeven in Tabel 6.4.

6.5 Voor- en nadelen

De horizonaanpak staat op vlak van betekenis veel sterker in de schoenen dan de opsplitsbare vaagwijzigers uit Hoofdstuk 4. Zoals uit de voorbeelden in dit hoofdstuk blijkt, is het wijzigen van drager en kern geen probleem bij de horizonaanpak. Bovendien kan dezelfde methodiek gebruikt worden zowel voor de inclusieve als voor de niet-inclusieve interpretatie. Om hiervoor te zorgen hebben we de lidmaatschapsfuncties beschouwd als zichtbaarheidsfuncties (horizonfuncties) voor een bepaalde waarnemer. In de inclusieve interpretatie staat die waarnemer steeds op dezelfde plaats en kijkt hij naar de elementen in het universum, afwisselend met andere gezichtsvermogens (b.v. zonder bril, met een verrekijker). In de niet-inclusieve interpretatie blijft het gezichtsvermogen van de waarnemer steeds hetzelfde, maar wandelt hij a.h.w. rond in het universum.

	extreem mooi	zeer mooi	mooi	tamelijk mooi	een beetje mooi
Assepoester	1.00	0.67	0.33	0.00	0.00
Sneeuwwitje	0.67	1.00	0.67	0.33	0.00
Prins	0.33	0.67	1.00	0.67	0.00
Roodkapje	0.00	0.33	0.67	1.00	0.33
Dwerg	0.00	0.00	0.00	0.33	1.00
Heks	0.00	0.00	0.00	0.00	0.33
Wolf	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Trol	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabel 6.4: Lidmaatschapsgraden van mooi en gewijzigde termen (niet-inclusieve interpretatie)

Door bovendien zichtbaarheid te definiëren enkel in termen van afstand, hebben we ons niet moeten beperken tot (een geschikte deelverzameling van) $\mathbb{R}$ als universum. Meer in het bijzonder mag het universum een willekeurige verzameling X zijn, zo lang ze maar kan uitgerust worden met een pseudo-metrick die verband houdt met het concept dat men wil representeren. Het opnemen van die pseudo-metrick in de methodiek kan beschouwd worden als het in rekening brengen van de context die het universum uitmaakt.

Alle betrokken lidmaatschapsfuncties kunnen bovendien gedefinieerd worden op basis van één algemene formule (de horizongenerator), en een specifiek drietal voor elke term (de waarnemer en zijn gezichtsvermogen). Niettemin schaadt deze eenvoud de expressiviteit niet, zoals we geïllustreerd hebben in de voorbeelden. We merken ook op dat de definities van horizonfunctie en horizongenerator kunnen uitgebreid worden tot X - L afbeeldingen, waarbij L een tralie is die niet noodzakelijk samenvalt met $[0, 1]$.

Een minpunt is dat er geen regels of technieken voorhanden zijn voor het bepalen van de gezichtsvermogens, die daardoor nogal ad hoc dienen gekozen te worden. Een ander nadeel van de horizonaanpak is dat er vanuit de techniek zelf (nl. vanuit de horizongenerator) typische vormen voor de lidmaatschapsfuncties worden opgedrongen. Niettegenstaande er – zoals we ruim geïllustreerd hebben – horizongeneratoren zijn die de vaak gebruikte en aanvaarde algemene vormfuncties zoals de lineaire, de trapezoidale, de S - en de π -lidmaatschapsfuncties voortbrengen, ervaren we het toch als een beperking dat men niet zonder meer kan starten met om het even welke lidmaatschapsfunctie voor een term, om op basis daarvan de lidmaatschapsfunctie voor een gewijzigde versie van die term te bepalen. Technieken die we zullen introduceren in het volgende hoofdstuk laten dit wel toe.

Hoofdstuk 7

Vaagrelationele Wijzigers

Quand le vent du
changement souffle
sur toi, ouvre tes ailes...
(Anoniem)

In dit hoofdstuk stellen we een klasse voor van L -vaagwijzigers die gebaseerd zijn op L -vaagrelaties. We illustreren hoe ze kunnen gebruikt worden voor de representatie van linguïstische wijzigers die inwerken op termen voorgesteld door L -vaagverzamelingen. De betrokken L -vaagrelaties zorgen ervoor dat de context in rekening wordt gebracht, hierbij een duidelijke betekenis verlenend aan de L -vaagwijzigers. Voor zover we weten, zijn dit de eerste L -vaagwijzigers die deze modelleringstaak aankunnen voor een complete tralie L verschillend van het reële eenheidsinterval. Maar ook wat betreft $[0, 1]$ zullen we aantonen dat ze op semantisch vlak duidelijk beter zijn dan de traditionele vaagwijzigers, zoals de verheffende en de verschuivende.

7.1 Inleiding

Voor het bepalen van de mate waarin een object y behoort tot *zeer* A , kijken verheffende vaagwijzigers (en alle vaagwijzigers met zuivere nawijziging) enkel naar de mate waarin y behoort tot A . Ze verwaarlozen daarbij alle andere elementen van het universum en hun lidmaatschapsgraad in A . Verschuivende vaagwijzigers kijken niet eens naar de mate waarin y tot A behoort, maar enkel naar de mate waarin een ander element z behoort tot A (als de lidmaatschapsfunctie van A stijgend is, dan gaat het om een element z dat links ligt van y , als A dalend is, om een element z dat rechts ligt van y). De horizonaanpak en de vaagwijzigers van Bouchon-Meunier die we aan het begin van vorig hoofdstuk vermeld hebben, zijn van een ander kaliber in die zin dat ze zich niets aantrekken van de mate waarin y behoort tot A maar teruggrijpen naar een horizonsgenerator (cfr. horizonaanpak) of een hulpfunctie (cfr. vaagwijzigers van Bouchon-Meunier). Zowel A als *zeer* A worden vanuit dezelfde horizonsgenerator

of hulpfunctie gegenereerd en staan op die manier natuurlijk wel in verband met elkaar. Een nadeel inherent aan deze werkwijze is dat de algemene vorm van alle betrokken lidmaatschapsfuncties opgedrongen wordt door de techniek zelf.

In dit hoofdstuk pleiten we voor het gebruik van een klasse van L -vaagwijzigers die in staat zijn een willekeurige L -vaagverzameling op verantwoorde wijze te wijzigen. Om te bepalen in welke mate y behoort tot zeer A kijken ze daarbij niet alleen naar de mate waarin y behoort tot A , maar brengen ze ook de elementen uit de *context* van y in rekening. Deze context wordt daarbij gezien als de elementen die gerelateerd zijn aan y (in een bepaalde mate). L -vaagrelaties vervullen hierbij een fundamentele rol; de (soort van) L -vaagrelatie die gebruikt wordt, bepaalt voor een groot deel de semantiek van de resulterende L -vaagwijziger.

Wat betreft structuur is dit hoofdstuk opgevat zoals het vorige: eerst reiken we alle nodige wiskundige bouwblokken aan, en vervolgens leggen we uit hoe ze kunnen gebruikt worden voor de representatie van gewijzigde linguïstische termen. De centrale concepten zijn het direct en het superdirect beeld van een L -vaagverzameling onder een L -vaagrelatie. Van dit laatste beeld bestaan er verschillende definities. In Sectie 7.2 motiveren we onze keuze. In Sectie 7.3 formaliseren we het verband met het samenstellen van L -vaagrelaties; een interessant voordeel hiervan is dat eigenschappen van het samenstellen van L -vaagrelaties kunnen overgedragen worden op L -vaagrelationele beelden. In Sectie 7.4 gaan we een eerste reeks eigenschappen van L -vaagrelationele beelden na, met name onder L -vaagrelaties van een universum X naar een universum Y . Voor ons einddoel zijn we eigenlijk geïnteresseerd in L -vaagrelaties in X (dus van X naar X) maar de algemenere vorm van X naar Y brengt voor de onderzochte eigenschappen geen significante meerkost met zich mee. Wel kunnen voor L -vaagrelaties in X (en zeker ook voor reflexieve L -vaagrelaties) nog bijkomende eigenschappen onderzocht worden, zoals we doen in Sectie 7.5. De rest van het hoofdstuk tenslotte is gewijd aan het gebruiken van deze wiskundige bouwstenen voor de representatie van linguïstische wijzigers.

7.2 L -vaagrelationele beelden

Naast het samenstellen van relaties is ook het nemen van het direct beeld van een verzameling onder een relatie een basisbewerking uit de klassieke relationele calculus. Als R een relatie is van een universum X naar een universum Y , en A een deelverzameling is van X , dan wordt het direct beeld van A onder R gegeven door

$$R\uparrow A = \{y | y \in Y \wedge (\exists x \in X)(x \in A \wedge (x, y) \in R)\} \quad (7.1)$$

Het direct beeld van A is m.a.w. een deelverzameling van Y , die alle elementen van Y bevat die in relatie staan met (minstens) een element van A . In termen van R -voorverzamelingen

$$R\uparrow A = \{y | y \in Y \wedge A \cap Ry \neq \emptyset\} \quad (7.2)$$

Er bestaan een aantal verfijningen van dit beeld. Eén ervan is de verzameling van alle elementen van Y die enkel in relatie staan tot elementen van A . Dit zogenaamde superdirect beeld is gedefinieerd als volgt [18]

$$R\downarrow A = \{y | y \in Y \wedge Ry \subseteq A\} \quad (7.3)$$

of nog

$$R\downarrow A = \{y | y \in Y \wedge (\forall x \in X)((x, y) \in R \Rightarrow x \in A)\} \quad (7.4)$$

Een bekend mooi voorbeeld dat de betekenis van deze beelden verduidelijkt, gaat als volgt: stel dat Y een verzameling van documenten is, dat X een verzameling van sleutelwoorden is en dat de relatie R van X naar Y het koppel (x, y) bevat als sleutelwoord x voorkomt in document y . Bij een zoekactie in de databank van documenten geeft men een aantal sleutelwoorden op, d.w.z. een deelverzameling A van X . Het direct beeld $R\uparrow A$ van A onder R is dan de verzameling van documenten uit Y waarin minstens één van de sleutelwoorden uit A voorkomt. Het superdirect beeld $R\downarrow A$ is dan de verzameling van documenten die enkel sleutelwoorden uit A bevatten (m.a.w. documenten uit $R\downarrow A$ bevatten geen andere sleutelwoorden dan die uit A). Indien in een document y_0 uit Y geen enkel sleutelwoord uit X voorkomt, doet zich hierbij wel een ietwat vreemde, onintuïtieve situatie voor. Aangezien Ry_0 dan de lege verzameling is, zal y_0 behoren tot het superdirect beeld van elke deelverzameling van X , en zal document y_0 dus opduiken als resultaat bij gelijk welke zoekbewerking. Dit probleem werd verholpen in [18]; we komen hier later op terug. Als alle documenten uit Y minstens één sleutelwoord uit X bevatten, is het wel duidelijk dat $R\downarrow A \subseteq R\uparrow A$, voor alle A in $\mathcal{P}(X)$. Vaak geeft het louter testen op het voorkomen van een sleutelwoord in een document aanleiding tot niet zo'n goed zoekresultaat (zie [108],[109]). Zo kan een boeiend document over de Belgische geschiedenis niet eens het sleutelwoord "geschiedenis" bevatten. Interessanter wordt het wanneer men i.p.v. het voorkomen, de relevantie van een document voor een sleutelwoord in beschouwing kan nemen. Het begrip "relevantie" is niet scherp maar vaag en kan dan ook beter voorgesteld worden door een L -vaagrelatie R . $R(x, y)$ drukt dan de mate uit waarin document y relevant is voor sleutelwoord x .

De beelden van scherpe verzamelingen onder scherpe relaties kunnen uitgebreid worden tot beelden van L -vaagverzamelingen onder L -vaagrelaties ([18], [57]). Meer bepaald door in (7.1) en in (7.4) de booleaanse operatoren $\wedge$ en $\Rightarrow$ te vervangen door hun L -vaaglogische tegenhangers en de existentiële en de universele quantoren te veralgemenen door het nemen van het supremum en het infimum over het universum, ontstaat de volgende definitie:

7.1. Definitie (L -vaagrelationele beelden). Zij L een complete tralie. Zij X en Y universa. Voor een triangulaire norm $\mathcal{T}$ op L en een implicator $\mathcal{I}$ op L , een L -vaagrelatie R van X naar Y en een L -vaagverzameling A in X , zijn het direct beeld $R\uparrow A$ en het superdirect beeld $R\downarrow A$ van A onder R de

L -vaagverzamelingen in Y die gedefinieerd zijn als

$$R\uparrow A(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R(x, y)) \quad (7.5)$$

$$R\downarrow A(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)) \quad (7.6)$$

voor alle y in Y .

Elke complete tralie L is begrensd. Het is dus in bovenstaande definitie zinvol om te spreken over een triangulaire norm en een implicator op L . Bovendien garandeert het compleet zijn van L dat de lidmaatschapsgraad van y in $R\uparrow A$ en $R\downarrow A$ gedefinieerd is voor alle y in Y . (7.5) drukt uit dat y behoort tot het direct beeld van A onder R in de mate waarin A en Ry overlappen. Inderdaad

$$R\uparrow A(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), Ry(x)) = \text{OVERL}(A, Ry) \quad (7.7)$$

wat kan gezien worden als een veralgemening van (7.2). Langs de andere kant behoort y tot het superdirect beeld van A onder R in de mate waarin Ry bevat is in A , of nog

$$R\downarrow A(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(Ry(x), A(x)) = \text{INCL}(Ry, A) \quad (7.8)$$

wat een veralgemening is van (7.3).

We maken in bovenstaande definitie een bewuste keuze voor notationele eenvoud door het symbool voor de triangulaire norm (respectievelijk implicator) niet op te nemen in de notatie voor het direct (respectievelijk superdirect) beeld. Dit is ingegeven door onze vaststelling dat er normaal gezien bij theoretische studie, en nog meer bij toepassingen, slechts sprake is van één triangulaire norm en één implicator tegelijkertijd, waardoor ondubbelzinnig vastligt welke logische operator op dat moment gebruikt wordt voor het nemen van het direct en het superdirect beeld. We vragen de lezer dan ook om steeds even in de context te kijken welke t-norm en implicator bedoeld worden. In de uitzonderlijke situaties waarin we toch een onderscheid dienen te maken, zullen we gebruik maken van de notaties $R\uparrow_{\mathcal{T}} A$ en $R\downarrow_{\mathcal{I}} A$.

Zoals reeds even aangehaald bij het voorbeeld van de term-document relatie, heeft het superdirect beeld uit Definitie 7.1 een belangrijk kenmerk dat opgemerkt werd in [57], namelijk een gebrek aan een niet-ledigheidsvoorwaarde. Informeel gezegd drukt de lidmaatschapsgraad van y in $R\downarrow A$ de exclusiviteit van y voor A uit: y behoort tot $R\downarrow A$ in de mate waarin y enkel gerelateerd is met elementen uit A . Als y zo goed als op zichzelf staat, dan zullen alle lidmaatschapsgraden in Ry klein zijn. In dit geval neigt $R\downarrow A(y)$ naar een grote waarde. In het extreme geval dat $Ry = \emptyset$, zal y zelfs in de mate 1 behoren tot het superdirect beeld van elke denkbare L -vaagverzameling A onder R . Een y

die met geen enkel element uit X gerelateerd is, wordt op die manier beschouwd als exclusief gerelateerd aan *alle* denkbare L -vaagverzamelingen in X . Om dit fenomeen te vermijden werd het volgende verbeterd superdirect beeld ingevoerd [57]:

7.2. Definitie (Kerre superdirect beeld). Zij L een complete tralie. Voor een triangulaire norm $\mathcal{T}$ op L en een implicator $\mathcal{I}$ op L , een L -vaagrelatie R van X naar Y en een L -vaagverzameling A in X , is het Kerre superdirect beeld $R\downarrow^k A$ van A onder R de L -vaagverzameling in Y die gedefinieerd is als

$$R\downarrow^k A = R\downarrow A \cap R\uparrow A$$

Onder bepaalde voorwaarden voor R valt het Kerre superdirect beeld samen met het superdirect beeld.

7.3. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Voor elke L -vaagrelatie R van X naar Y met normale voorverzamelingen en elke L -vaagverzameling A in X geldt dat

$$R\downarrow^k A = R\downarrow A$$

Bewijs. Als alle voorverzamelingen van R normaal zijn dan bestaat er voor elke y in Y een x_0 in X zo dat $R(x_0, y) = 1$. Er geldt dan

$$\begin{aligned} R\downarrow A(y) &= \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)) \\ &\leq \mathcal{I}(R(x_0, y), A(x_0)) \\ &\leq \mathcal{I}(1, A(x_0)) \\ &\leq A(x_0) \\ &\leq \mathcal{T}(A(x_0), 1) \\ &\leq \mathcal{T}(A(x_0), R(x_0, y)) \\ &\leq \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R(x, y)) \\ &= R\uparrow A(y) \end{aligned}$$

zodat $R\downarrow A \subseteq R\uparrow A$, waaruit het gestelde volgt. $\square$

De voorwaarde die gesteld wordt in bovenstaande eigenschap is redelijk zwak. Voor onze doeleinden zullen we gebruik maken van reflexieve L -vaagrelaties. Men ziet eenvoudig in dat deze voldoen aan Eigenschap 7.3.

7.3 Verband met samenstellen van L -vaagrelaties

Van de beelden van vaagverzamelingen onder vaagrelaties is het oudste en meest gebruikte het direct beeld, dat o.m. een prominente rol speelt bij de compositieregel voor inferentie. In [105], [106] wordt dit beeld nogal ad hoc “de samenstelling van een unaire vaagrelatie A en een binaire vaagrelatie R ” genoemd.

Ook in recente werken omtrent benaderend redeneren gebruiken vele auteurs (b.v. [2], [99], [107], [110]) nog steeds de compositionele notatie $A \circ R$ zoals geïntroduceerd in [105], [106]. Ook al wordt er in de literatuur vaak nogal ad hoc en op het slordige af mee omgesprongen, het is duidelijk dat er een verband is tussen het nemen van het direct beeld onder een L -vaagrelatie enerzijds en het samenstellen van L -vaagrelaties anderzijds. In [18] worden veel aspecten van verschillende soorten beelden en verschillende soorten samenstellingen naast elkaar onderzocht. Het blootleggen van het wiskundig correct verband tussen de twee belangrijke soorten basisbewerkingen maakt het echter eenvoudig om onderzoeksresultaten behaald bij de ene soort over te brengen op de andere soort. We leggen hierna uit hoe dit in zijn werk gaat voor het direct en het superdirect beeld. Voor een overzicht waarbij ook nog andere beelden betrokken worden, verwijzen we naar [73]. Net zoals het direct beeld kan in verband gebracht worden met het samenstellen van L -vaagrelaties gedefinieerd in Definitie 2.71, kan het superdirect beeld gelinkt worden aan een andere vorm van samenstellen die superproduct genoemd wordt.

7.4. Definitie (Superproduct). [4, 18] Zij L een complete tralie en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij R in $\mathcal{F}_L(X \times Z)$ en S in $\mathcal{F}_L(Z \times Y)$. Het superproduct van R en S is de L -vaagrelatie van X naar Y die gedefinieerd is als

$$R \triangleright_{\mathcal{I}} S (x, y) = \inf_{z \in Z} \mathcal{I}(S(z, y), R(x, z))$$

voor alle x in X en alle y in Y .

In de lijn van het principe van cilindrische extensie [106] definiëren we de uitbreidingsoperator $\overleftarrow{}$.

7.5. Definitie (Linkeruitbreiding). Zij L een tralie. De linkeruitbreidingsoperator $\overleftarrow{}$ is de $\mathcal{F}_L(X) - \mathcal{F}_L(X \times X)$ afbeelding die elke L -vaagverzameling A in X omzet in de L -vaagrelatie $\overleftarrow{A}$ in X , die gedefinieerd is als

$$\overleftarrow{A}(x, y) = A(y)$$

voor alle (x, y) in X^2 . $\overleftarrow{A}$ wordt de linkeruitbreiding van A genoemd.

Men ziet onmiddellijk dat een L -vaagrelatie R in X de linkeruitbreiding van een L -vaagverzameling A in X is a.s.a. $xR = A$, voor alle x in X . Aangezien de linkeruitbreiding van een L -vaagverzameling A in X een L -vaagrelatie in X is, is het zinvol om de samenstellingen te beschouwen van $\overleftarrow{A}$ met een L -vaagrelatie R van X naar Y .

7.6. Eigenschap. Zij L een complete tralie. Zij $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L , $\mathcal{I}$ een implicator op L , dan geldt voor alle R in $\mathcal{F}_L(X \times Y)$ en alle A in $\mathcal{F}_L(X)$

$$\overleftarrow{A} \circ_{\mathcal{T}} R = \overleftarrow{R \uparrow A}$$

$$\overleftarrow{A} \triangleright_{\mathcal{I}} R = \overleftarrow{R \downarrow A}$$

Bewijs. Het bewijs volgt uit de toepassing van de definities van de betrokken concepten. Voor alle x in X en y in Y geldt

$$\begin{aligned}\overleftarrow{A} \circ_{\mathcal{T}} R(x, y) &= \sup_{z \in X} \mathcal{T}(\overleftarrow{A}(x, z), R(z, y)) \\ &= \sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), R(z, y)) = R\uparrow A(y) \\ \overleftarrow{A} \triangleright_{\mathcal{I}} R(x, y) &= \inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(z, y), \overleftarrow{A}(x, z)) \\ &= \inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(z, y), A(z)) = R\downarrow A(y)\end{aligned}$$

Opvallend hierbij is dat de rechterleden van de uitdrukkingen enkel afhangen van y terwijl de linkerleden afhankelijk lijken te zijn van x en van y . Wegens $R\uparrow A(y) = \overleftarrow{R\uparrow A}(x, y)$ en $R\downarrow A(y) = \overleftarrow{R\downarrow A}(x, y)$ volgt het gestelde. $\square$

7.4 Eigenschappen van L -vaagrelationele beelden

We merken vooraf op dat sommige van de eigenschappen in deze sectie met het hierboven beschreven formeel verband kunnen afgeleid worden uit de eigenschappen die in [18] aangetoond werden voor het samenstellen van L -vaagrelaties. Voor ons einddoel is het echter vaak interessant om een nog fijnere versie van deze eigenschappen te hebben (b.v. waar in [18] de gelijkheid werd aangetoond, willen wij ook weten wanneer de inclusie in deze of gene richting geldt), of konden we dezelfde eigenschap aantonen onder minder strenge voorwaarden. We hebben er dan ook voor geöpteerd om in dit hoofdstuk van alle eigenschappen het bewijs op zijn minst te schetsen, en wel onmiddellijk in termen van L -vaagrelationele beelden.

Monotoniciteit

Om te komen tot de L -vaagrelationele beelden uit Definitie 7.1 moeten er allerlei “ingrediënten” bij elkaar gebracht worden: een L -vaagrelatie, een L -vaagverzameling, een triangulaire norm, een implicator. In een eerste eigenschap kijken we wat er gebeurt met de L -vaagrelationele beelden indien we deze ingrediënten vergroten of verkleinen.

7.7. Eigenschap (Monotoniciteit). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ t -normen op L en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_1$ en $\mathcal{I}_2$ implicatoren op L . Zij verder R , R_1 en R_2 L -vaagrelaties van X naar Y en A , A_1 en A_2 L -vaagverzamelingen in X , dan geldt

- (1) Als $R_1 \subseteq R_2$ dan: (a) $R_1\uparrow A \subseteq R_2\uparrow A$
(b) $R_1\downarrow A \supseteq R_2\downarrow A$
- (2) Als $A_1 \subseteq A_2$ dan: (a) $R\uparrow A_1 \subseteq R\uparrow A_2$
(b) $R\downarrow A_1 \subseteq R\downarrow A_2$

- (3) Als $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ en $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$ dan: (a) $R\uparrow_{\mathcal{T}_1} A \subseteq R\uparrow_{\mathcal{T}_2} A$
 (b) $R\downarrow_{\mathcal{I}_1} A \subseteq R\downarrow_{\mathcal{I}_2} A$

Bewijs. Bovenstaande inclusies kunnen aangetoond worden steunend op het monotoniceitsgedrag van t-normen en implicatoren. We bewijzen als voorbeeld (1b) en (2a); de rest verloopt analoog. Zij y in Y . Uit $R_1 \subseteq R_2$ volgt $R_1(x, y) \leq R_2(x, y)$ voor alle x in X . Wegens het dalend gedrag van $\mathcal{I}$ in het eerste argument volgt hieruit

$$\mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)) \geq \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))$$

voor alle x in X en dus

$$\inf_{x \in X} \mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)) \geq \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x))$$

of het gestelde. Uit $A_1 \subseteq A_2$ volgt $A_1(x) \leq A_2(x)$ voor alle x in X . Wegens het stijgend gedrag van $\mathcal{T}$ volgt hieruit

$$\mathcal{T}(A_1(x), R(x, y)) \leq \mathcal{T}(A_2(x), R(x, y))$$

voor alle x in X en dus

$$\sup_{x \in X} \mathcal{T}(A_1(x), R(x, y)) \leq \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A_2(x), R(x, y))$$

of het gestelde. □

Het vergroten van de ingrediënten heeft dus steeds een vergroting van de L -vaagrelationele beelden tot gevolg, behalve in geval (1b). We voelen inderdaad ook intuïtief aan dat in dit geval door het groter worden van de L -vaagrelatie het “moeilijker” wordt voor elementen uit Y om nog exclusief gerelateerd te zijn met A . Bovenstaande eigenschap zal een zeer duidelijke interpretatie krijgen wanneer we op het einde van dit hoofdstuk L -vaagrelationele wijzigers gaan gebruiken voor de representatie van linguïstische wijzigers, maar komt ook reeds goed van pas als hulpmiddel om andere eigenschappen te bewijzen.

Interactie met doorsnede

Bij de voorgaande eigenschap hebben we in het ongewisse gelaten hoe we de ingrediënten verkleinen. Wegens het monotone karakter van een triangulaire norm $\mathcal{T}$ op L , is één mogelijkheid om een L -vaagverzameling A in X te verkleinen, de $\mathcal{T}$ -doorsnede te nemen met een andere L -vaagverzameling B in X . Wegens Eigenschap 7.7 geldt dan $R\uparrow(A \cap_{\mathcal{T}} B) \subseteq R\uparrow A$ maar ook $R\uparrow(A \cap_{\mathcal{T}} B) \subseteq R\uparrow B$. Enkel voor $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ kunnen we uit deze twee resultaten met zekerheid afleiden dat $R\uparrow(A \cap B) \subseteq R\uparrow A \cap R\uparrow B$ (merk op dat de t-norm die we gebruiken voor het nemen van het direct beeld hierbij mag afwijken van $\mathcal{T}_M$). Een zoektocht naar een bewijs voor een analoge uitdrukking voor alle t-normen zou vruchteloos zijn, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

7.8. Voorbeeld. Stel A en B in $\mathcal{F}(X)$ en R in $\mathcal{F}(X \times Y)$ zo dat $A(x) = B(x) = R(x, y) = \frac{1}{2}$, voor alle x in X en alle y in Y . Wanneer we gebruik maken van $\mathcal{T}_P$ voor het nemen van het direct beeld, dan geldt voor alle y in Y dat $R\uparrow A(y) = \frac{1}{4} = R\uparrow B(y)$ en $R\uparrow(A \cap_{\mathcal{T}_P} B)(y) = \frac{1}{8}$ waaruit blijkt dat

$$R\uparrow A \cap_{\mathcal{T}_P} R\uparrow B \subset R\uparrow(A \cap_{\mathcal{T}_P} B)$$

Zelfs indien we de $\mathcal{T}_M$ -doorsnede nemen, geldt de inclusie slechts in één richting en is er dus in het algemeen geen sprake van gelijkheid, zoals uit volgend voorbeeld blijkt.

7.9. Voorbeeld. Stel $X = Y = [0, 1]$, $A(x) = x$, $B(x) = 1 - x$ en $R(x, y) = 1$ voor alle x in $[0, 1]$ en alle y in Y . Om het even welke t-norm $\mathcal{T}$ gebruikt wordt voor het nemen van het direct beeld geldt er voor alle y in $[0, 1]$

$$R\uparrow(A \cap B)(y) = \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{T}(1, \min(x, 1 - x)) = \frac{1}{2}$$

terwijl

$$R\uparrow A(y) = \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{T}(1, x) = 1 \text{ en } R\uparrow B(y) = \sup_{x \in [0, 1]} \mathcal{T}(1, 1 - x) = 1$$

waaruit blijkt dat $R\uparrow(A \cap B) \subset R\uparrow A \cap R\uparrow B$.

We hadden tot dezelfde conclusie kunnen komen op basis van het voorbeeld met de termen-documentenrelatie. Als $A = \{\text{geschiedenis, België}\}$ en $B = \{\text{België, Nederland}\}$ verzamelingen van sleutelwoorden zijn, dan is $R\uparrow(A \cap B)$ de verzameling van documenten die het woord “België” bevatten. Een document y_0 waarin “België” niet voorkomt maar “geschiedenis” en “Nederland” wel, zal dus niet behoren tot $R\uparrow(A \cap B)$ maar wel tot $R\uparrow A \cap R\uparrow B$. Zelfs in het scherpe geval is het direct beeld van de doorsnede dus niet gelijk aan de doorsnede van de directe beelden. De kaarten liggen enigszins anders wanneer het gaat over het superdirect beeld. Als A een scherpe deelverzameling is van X en R een scherpe relatie is van X naar Y dan geldt voor alle y in Y

$$\begin{aligned} y \in R\downarrow(A \cap B) &\Leftrightarrow (\forall x \in X)((x, y) \in R \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X)((x, y) \in R \Rightarrow x \in A) \wedge ((x, y) \in R \Rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in X)((x, y) \in R \Rightarrow x \in A) \wedge (\forall x \in X)((x, y) \in R \Rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow y \in R\downarrow A \cap R\downarrow B \end{aligned}$$

In het scherpe geval is het superdirect beeld van de doorsnede dus gelijk aan de doorsnede van de superdirecte beelden. We gaan nu na in hoever dit ook geldt voor de L -vaagrelationele tegenhangers.

7.10. Eigenschap ($\mathcal{T}$ -doorsnede van L -vaagverzamelingen). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder R een L -vaagrelatie in X en A en B L -vaagverzamelingen in X . Als $\mathcal{I}$ en $\mathcal{T}$ voldoen aan $\mathcal{T}(\mathcal{I}(x, y), \mathcal{I}(x, z)) \leq \mathcal{I}(x, \mathcal{T}(y, z))$ voor alle x, y en z in L dan geldt

$$R\downarrow A \cap_{\mathcal{T}} R\downarrow B \subseteq R\downarrow(A \cap_{\mathcal{T}} B)$$

Bewijs. Voor alle y in Y geldt

$$\begin{aligned}
 R\downarrow(A \cap_{\mathcal{T}} B)(y) &= \inf_{x \in X} (\mathcal{I}(R(x, y), \mathcal{T}(A(x), B(x))) \\
 &\geq \inf_{x \in X} \mathcal{T}(\mathcal{I}(R(x, y), A(x)), \mathcal{I}((R(x, y), B(x))) \\
 &\geq \mathcal{T}(\inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)), \inf_{x \in X} \mathcal{I}((R(x, y), B(x))) \\
 &= (R\downarrow A \cap_{\mathcal{T}} R\downarrow B)(y)
 \end{aligned}$$

waaruit het gestelde. $\square$

We merken hierbij op dat een t-norm $\mathcal{T}$ waarvan de partiële afbeeldingen sup-morfismen zijn, en zijn residuele implicator $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ steeds voldoen aan

$$\mathcal{T}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y), \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z)) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, \mathcal{T}(y, z))$$

Dit volgt uit Hulpstellingen 2.55 en 2.34. Zelfs in dit geval gaat de gelijkheid echter niet op, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

7.11. Voorbeeld. Stel A en B in $\mathcal{F}(X)$ en R in $\mathcal{F}(X \times Y)$ zo dat $A(x) = B(x) = R(x, y) = \frac{1}{2}$, voor alle x in X en alle y in Y . Wanneer we gebruik maken van $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ voor het nemen van het superdirect beeld, dan geldt voor alle y in Y dat $R\downarrow A(y) = R\downarrow B(y) = \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$ en $R\downarrow(A \cap_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}} B)(y) = \mathcal{I}_{\mathcal{P}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ waaruit blijkt dat

$$R\downarrow(A \cap_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}} B) \subset R\downarrow A \cap_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}} R\downarrow B$$

Voor de $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ doorsnede kunnen we de omgekeerde inclusie uit Eigenschap 7.10 wel aantonen voor willekeurige $\mathcal{I}$. Er is daarbij dus geen speciaal verband vereist tussen $\mathcal{I}$ en $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Wanneer een dergelijk verband wel vervuld is, geldt er zelfs gelijkheid.

7.12. Eigenschap ($\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ -doorsnede van L -vaagverzamelingen). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder R een L -vaagrelatie in X en A en B L -vaagverzamelingen in X , dan geldt

$$R\uparrow(A \cap B) \subseteq R\uparrow A \cap R\uparrow B$$

$$R\downarrow(A \cap B) \subseteq R\downarrow A \cap R\downarrow B$$

Als de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ meetmorfismen zijn dan geldt bovendien de gelijkheid

$$R\downarrow(A \cap B) = R\downarrow A \cap R\downarrow B$$

Bewijs. De inclusies kunnen aangetoond worden m.b.v. Eigenschap 7.7. Om b.v. de tweede inclusie te bewijzen, merken we op dat uit $A \cap B \subseteq A$ en uit $A \cap B \subseteq B$ respectievelijk volgt dat $R\downarrow(A \cap B) \subseteq R\downarrow A$ en $R\downarrow(A \cap B) \subseteq R\downarrow B$ waaruit onmiddellijk het gestelde. Als de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ meetmorfismen zijn, dan geldt bovendien voor alle x, y en z in L dat $\mathcal{I}(x, \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(y, z)) = \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(\mathcal{I}(x, y), \mathcal{I}(x, z))$ waaruit blijkt dat $\mathcal{I}$ en $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ in dit geval ruim voldoen aan de voorwaarden uit Eigenschap 7.10. Hieruit volgt de omgekeerde inclusie, en dus de gelijkheid. $\square$

7.13. Opmerking. Eigenschap 7.12 kan veralgemeend worden voor een familie $(A_i)_{i \in I}$ van L -vaagverzamelingen in X . Uit Eigenschap 7.7 volgt inderdaad dat

$$R\uparrow\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (R\uparrow A_i)$$

$$R\downarrow\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} (R\downarrow A_i)$$

voor alle L -vaagrelaties R van X naar Y . Indien de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ infomorfismen zijn, dan geldt in het laatste geval de gelijkheid [18].

Net zoals we een L -vaagverzameling kunnen verkleinen door haar $\mathcal{T}$ -doorsnede te nemen met een andere, kunnen we een L -vaagrelatie verkleinen. Door de commutativiteit van $\mathcal{T}$ in Definitie 7.1 spelen de L -vaagverzameling A en de L -vaagrelatie R een gelijkaardige rol in het direct beeld. Het is dan ook niet vreemd dat we voor de interactie tussen het direct beeld en de doorsnede van L -vaagrelaties hetzelfde resultaat kunnen presenteren als bij de L -vaagverzamelingen, nl. dat het direct beeld van een L -vaagverzameling A genomen onder de doorsnede van L -vaagrelaties een deelverzameling is van de doorsnede van de directe beelden (zie Eigenschap 7.15). $\mathcal{I}$ is niet commutatief, dus wat betreft de superdirecte beelden kunnen er enigszins andere resultaten verwacht worden, temeer omdat geval (1b) in Eigenschap 7.7 zich als een buitenbeentje gedraagt. Er duikt inderdaad o.m. de volgende inclusie op, die vervuld is zonder dat er speciale bijkomende voorwaarden moeten geëist worden:

7.14. Eigenschap ($\mathcal{T}$ -doorsnede van L -vaagrelaties). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder R_1 en R_2 L -vaagrelaties van X naar Y en A een L -vaagverzameling in X , dan geldt

$$(R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2) \downarrow A \supseteq R_1 \downarrow A \cap_{\mathcal{T}} R_2 \downarrow A$$

Bewijs. Wegens Eigenschap 7.7 is $(R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2) \uparrow A \supseteq R_1 \uparrow A$ en $(R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2) \uparrow A \supseteq R_2 \uparrow A$ waaruit

$$(R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2) \downarrow A \supseteq R_1 \downarrow A \cup R_2 \downarrow A$$

Er geldt dus ook

$$(R_1 \cap_{\mathcal{T}} R_2) \downarrow A \supseteq R_1 \downarrow A \cap R_2 \downarrow A$$

en aangezien $\mathcal{T}_M$ de grootste t-norm is, volgt hieruit het gestelde. $\square$

In bovenstaande eigenschap moet niet noodzakelijk dezelfde t-norm gebruikt worden voor het nemen van de doorsnede als voor het nemen van het direct beeld. Aangezien het in toepassingen meestal toch al niet voor de hand ligt om voor deze of gene logische operator te kiezen, zien we niet direct nood om de keuze nog wat moeilijker maken door er twee verschillende te gebruiken. Daarom hebben we in Eigenschap 7.14 bewust geen tweede t-norm geïntroduceerd, al houden we in het achterhoofd dat het wel kan. Wanneer we als t-norm voor de doorsnede $\mathcal{T}_M$ nemen, dan kunnen we voor het superdirect beeld nog een sterkere inclusie aantonen waarbij de unie van de superdirecte beelden betrokken wordt.

7.15. Eigenschap ($\mathcal{T}_M$ -doorsnede van L -vaagrelaties). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder R_1 en R_2 L -vaagrelaties van X naar Y en A een L -vaagverzameling in X , dan geldt

$$(R_1 \cap R_2) \uparrow A \subseteq R_1 \uparrow A \cap R_2 \uparrow A$$

$$(R_1 \cap R_2) \downarrow A \supseteq R_1 \downarrow A \cup R_2 \downarrow A$$

Bewijs. Wegens Eigenschap 7.7 is $(R_1 \cap R_2) \uparrow A \subseteq R_1 \uparrow A$ en $(R_1 \cap R_2) \uparrow A \subseteq R_2 \uparrow A$ waaruit

$$(R_1 \cap R_2) \uparrow A \subseteq R_1 \uparrow A \cap R_2 \uparrow A$$

Verder is wegens Eigenschap 7.7 $(R_1 \cap R_2) \downarrow A \supseteq R_1 \downarrow A$ en $(R_1 \cap R_2) \downarrow A \supseteq R_2 \downarrow A$ waaruit

$$(R_1 \cap R_2) \downarrow A \supseteq R_1 \downarrow A \cup R_2 \downarrow A$$

□

De omgekeerde inclusies uit Eigenschap 7.15 zijn niet algemeen geldig. Voor het direct beeld kan er immers een tegenvoorbeeld in de stijl van Voorbeeld 7.9 geconstrueerd worden. Het volgende voorbeeld illustreert dat ook voor het superdirect beeld de gelijkheid niet algemeen geldt.

7.16. Voorbeeld. Stel $X = Y = [0, 1]$, $A(x) = 0$, $R_1(x, y) = x$, en $R_2(x, y) = 1 - x$ voor alle x en y in $[0, 1]$. Men gaat dan eenvoudig na dat b.v. voor de Łukasiewicz implicator, voor alle y in $[0, 1]$ geldt dat

$$\begin{aligned} (R_1 \cap R_2) \downarrow A(y) &= \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}_W(\min(R_1(x, y), R_2(x, y)), A(x)) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}_W(\min(x, 1 - x), 0) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \min(1 - \min(x, 1 - x), 1) \\ &= \inf_{x \in [0, 1]} \max(1 - x, x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

terwijl

$$R_1 \downarrow A(y) = \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}_W(x, 0) = \inf_{x \in [0, 1]} 1 - x = 0$$

en

$$R_2 \downarrow A(y) = \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}_W(1 - x, 0) = \inf_{x \in [0, 1]} x = 0$$

waaruit

$$R_1 \downarrow A \cap R_2 \downarrow A = R_1 \downarrow A \cup R_2 \downarrow A \subset (R_1 \cap R_2) \downarrow A$$

7.17. Opmerking. Eigenschap 7.15 kan veralgemeend worden voor een familie $(R_i)_{i \in I}$ van L -vaagrelaties van X naar Y op de volgende manier:

$$\left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) \uparrow A \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \uparrow A)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) \downarrow A \supseteq \bigcup_{i \in I} (R_i \downarrow A)$$

en dus uiteraard ook

$$\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \downarrow A \supseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \downarrow A)$$

voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$.

Interactie met unie

Een mogelijkheid om een L -vaagverzameling A te vergroten is om er a.h.w. een L -vaagverzameling B “bij te gooien”, door het nemen van de unie. Bij het nemen van het direct en superdirect beeld hebben we respectievelijk een t -norm en een implicator nodig. Op basis daarvan kunnen we dikwijls al een doorsnede definiëren: ofwel met de t -norm van het direct beeld, ofwel met de t -norm waarvan we de residuele implicator gebruiken voor het superdirect beeld, bijvoorbeeld. Unie wordt in het kader van L -vaagverzamelingenleer gedefinieerd a.d.h.v. een triangulaire conorm, wat er op neer komt dat er voor de interactie van de beelden met unie een nieuwe logische operator moet bij gehaald worden. De interactie met die indringer loopt niet echt van een leien dakje. We illustreren eerst a.d.h.v. een reeks voorbeelden wat er zoal “mis gaat”.

7.18. Voorbeeld. Stel A en B in $\mathcal{F}(X)$ en R in $\mathcal{F}(X \times Y)$ zo dat $A(x) = 0.9$, $B(x) = 0.3$ en $R(x, y) = 0.9$, voor alle x in X en alle y in Y . Wanneer we gebruik maken van $\mathcal{T}_W$ voor het nemen van het direct beeld, dan geldt voor alle y in Y dat $R \uparrow A(y) = \mathcal{T}_W(0.9, 0.9) = 0.8$ en $R \uparrow B(y) = \mathcal{T}_W(0.3, 0.9) = 0.2$ zodat $(R \uparrow A \cup_{S_W} R \uparrow B)(y) = 1$. Anderzijds is $R \uparrow (A \cup_{S_W} B)(y) = \mathcal{T}_W(S_W(0.9, 0.3), 0.9) = \mathcal{T}_W(1, 0.9) = 0.9$ waaruit blijkt dat

$$R \uparrow (A \cup_{S_W} B) \subset R \uparrow A \cup_{S_W} R \uparrow B$$

7.19. Voorbeeld. Stel A en B in $\mathcal{F}(X)$ en R in $\mathcal{F}(X \times Y)$ zo dat $A(x) = 0.1$, $B(x) = 0.2$ en $R(x, y) = 0.9$, voor alle x in X en alle y in Y . Wanneer we gebruik maken van $\mathcal{T}_W$ voor het nemen van het direct beeld, dan geldt voor alle y in Y dat $R \uparrow A(y) = \mathcal{T}_W(0.1, 0.9) = 0$ en $R \uparrow B(y) = \mathcal{T}_W(0.2, 0.9) = 0.1$ zodat $(R \uparrow A \cup_{S_W} R \uparrow B)(y) = 0.1$. Anderzijds is $R \uparrow (A \cup_{S_W} B)(y) = \mathcal{T}_W(S_W(0.1, 0.2), 0.9) = \mathcal{T}_W(0.3, 0.9) = 0.2$ waaruit blijkt dat

$$R \uparrow A \cup_{S_W} R \uparrow B \subset R \uparrow (A \cup_{S_W} B)$$

Uit Voorbeelden 7.18 en 7.19 blijkt dat er geen algemeen verband (in termen van inclusie) is tussen het direct beeld van de unie en de unie van de directe beelden. We hebben dit geïllustreerd voor de Lukasiewicz t -norm op $[0, 1]$ en de duale t -conorm S_W (t.o.v. de involutieve negator $\mathcal{N}_s$). Ondanks een dergelijk sterk verband tussen de t -norm en de t -conorm kan er dus geen eigenschap omtrent interactie tussen direct beeld en unie (in termen van inclusie) geformuleerd worden. We onderzoeken verder hoe het gesteld is met de interactie tussen unie en superdirect beeld.

7.20. Voorbeeld. Stel A en B in $\mathcal{F}(X)$ en R in $\mathcal{F}(X \times Y)$ zo dat $A(x) = 0.1$, $B(x) = 0.2$ en $R(x, y) = 0.9$, voor alle x in X en alle y in Y . Wanneer we gebruik maken van $\mathcal{I}_W$ voor het nemen van het superdirect beeld, dan geldt voor alle y in Y dat $R\downarrow A(y) = \mathcal{I}_W(0.9, 0.1) = 0.2$ en $R\downarrow B(y) = \mathcal{I}_W(0.9, 0.2) = 0.3$ zodat $(R\downarrow A \cup_{\mathcal{S}_W} R\downarrow B)(y) = 0.5$. Anderzijds is $R\downarrow(A \cup_{\mathcal{S}_W} B)(y) = \mathcal{I}_W(0.9, \mathcal{S}_W(0.1, 0.2)) = \mathcal{I}_W(0.9, 0.3) = 0.4$ waaruit blijkt dat

$$R\downarrow(A \cup_{\mathcal{S}_W} B) \subset R\downarrow A \cup_{\mathcal{S}_W} R\downarrow B$$

7.21. Voorbeeld. Stel $X = Y = [0, 1]$, $A(x) = x$, $B(x) = 1 - x$ en $R(x, y) = 1$ voor alle x en y in $[0, 1]$. Men gaat dan eenvoudig na dat voor elke implicator $\mathcal{I}$, voor elke y in Y geldt dat:

$$R\downarrow(A \cup B)(y) = \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(1, \max(x, 1 - x)) = \frac{1}{2}$$

terwijl

$$R\downarrow A(y) = \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(1, x) = 0 \text{ en } R\downarrow B(y) = \inf_{x \in [0, 1]} \mathcal{I}(1, 1 - x) = 0$$

waaruit blijkt

$$R\downarrow A \cup R\downarrow B \subset R\downarrow(A \cup B)$$

Er is dus blijkbaar ook geen algemeen verband voor het superdirect beeld. Wel zijn er de volgende interacties met de $\mathcal{S}_M$ -unie:

7.22. Eigenschap ($\mathcal{S}_M$ -unie van L -vaagverzamelingen). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder R een L -vaagrelatie in X en A en B L -vaagverzamelingen in X , dan geldt

$$R\uparrow A \cup R\uparrow B \subseteq R\uparrow(A \cup B)$$

$$R\downarrow A \cup R\downarrow B \subseteq R\downarrow(A \cup B)$$

Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ joinmorfismen zijn, dan geldt bovendien de gelijkheid

$$R\uparrow A \cup R\uparrow B = R\uparrow(A \cup B)$$

Bewijs. Wegens Eigenschap 7.7 is $R\uparrow A \subseteq R\uparrow(A \cup B)$ en $R\uparrow B \subseteq R\uparrow(A \cup B)$ waaruit

$$R\uparrow(A \cup B) \supseteq R\uparrow A \cup R\uparrow B$$

Het bewijs van de tweede inclusie verloopt volkomen analoog. Indien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ joinmorfismen zijn, dan geldt bovendien voor alle y in Y

$$\begin{aligned} R\uparrow(A \cup B)(y) &= \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R(x, y)) \vee \mathcal{T}(B(x), R(x, y)) \\ &= \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R(x, y)) \vee \sup_{x \in X} \mathcal{T}(B(x), R(x, y)) \\ &= (R\uparrow A \cup R\uparrow B)(y) \end{aligned}$$

□

7.23. Opmerking. Eigenschap 7.22 kan veralgemeend worden voor een familie $(A_i)_{i \in I}$ van L -vaagverzamelingen in X . Uit Eigenschap 7.7 volgt inderdaad dat

$$\bigcup_{i \in I} (R \uparrow A_i) \subseteq R \uparrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$$

$$\bigcup_{i \in I} (R \downarrow A_i) \subseteq R \downarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$$

voor alle L -vaagrelaties R van X naar Y . Indien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan geldt in het eerste geval de gelijkheid [18].

Omwille van de gelijkaardige rol van L -vaagrelatie en L -vaagverzameling in het direct beeld (door de commutativiteit van de t -norm) verloopt de interactie tussen direct beeld met unie van L -vaagrelaties zoals die met de unie van L -vaagverzamelingen. Wat betreft het superdirect beeld zijn er echter weer significante verschillen te merken. Zo is er de volgende “onvoorwaardelijke” interactie:

7.24. Eigenschap ($\mathcal{S}$ -unie van L -vaagrelaties). Zij L een complete tralie, $\mathcal{I}$ een implicator op L en $\mathcal{S}$ een t -conorm op L . Zij verder R_1 en R_2 L -vaagrelaties van X naar Y en A een L -vaagverzameling in X , dan geldt

$$(R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2) \downarrow A \subseteq R_1 \downarrow A \cup R_2 \downarrow A$$

Bewijs. Wegens Eigenschap 7.7 is $(R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2) \downarrow A \subseteq R_1 \downarrow A$ en $(R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2) \downarrow A \subseteq R_2 \downarrow A$ waaruit

$$(R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2) \downarrow A \subseteq R_1 \downarrow A \cap R_2 \downarrow A$$

Er geldt dus ook

$$(R_1 \cup_{\mathcal{S}} R_2) \downarrow A \subseteq R_1 \downarrow A \cup R_2 \downarrow A$$

en aangezien $\mathcal{S}_M$ de kleinste t -conorm is, volgt hieruit het gestelde. $\square$

Wanneer we als t -conorm voor de unie $\mathcal{S}_M$ nemen, dan kunnen we voor het superdirect beeld nog een sterkere inclusie aantonen waarbij de doorsnede van de superdirecte beelden betrokken wordt.

7.25. Eigenschap (Interactie met unie van L -vaagrelaties). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t -norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder R_1 en R_2 L -vaagrelaties van X naar Y en A een L -vaagverzameling in X , dan geldt

$$(R_1 \cup R_2) \uparrow A \supseteq R_1 \uparrow A \cup R_2 \uparrow A$$

$$(R_1 \cup R_2) \downarrow A \subseteq R_1 \downarrow A \cap R_2 \downarrow A$$

Als bovendien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ joinmorfismen zijn en als de eerste partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ duale joinmorfismen zijn, dan gelden de gelijkheden

$$(R_1 \cup R_2) \uparrow A = R_1 \uparrow A \cup R_2 \uparrow A$$

$$(R_1 \cup R_2) \downarrow A = R_1 \downarrow A \cap R_2 \downarrow A$$

Bewijs. De inclusies kunnen ook nu weer aangetoond worden m.b.v. Eigenschap 7.7. Bovendien geldt voor alle y in Y dat

$$(R_1 \cup R_2) \uparrow A(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R_1(x, y) \vee R_2(x, y))$$

Indien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ joinmorfismen zijn, geldt dan

$$\begin{aligned} (R_1 \cup R_2) \uparrow A(y) &= \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R_1(x, y) \vee R_2(x, y)) \\ &= \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R_1(x, y)) \vee \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R_2(x, y)) \\ &= (R_1 \uparrow A \cup R_2 \uparrow A)(y) \end{aligned}$$

Bovendien geldt

$$(R_1 \cup R_2) \downarrow A(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R_1(x, y) \vee R_2(x, y), A(x))$$

Indien de eerste partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ duale joinmorfismen zijn, geldt dan

$$\begin{aligned} (R_1 \cup R_2) \downarrow A(y) &= \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)) \wedge \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R_1(x, y), A(x)) \wedge \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R_2(x, y), A(x)) \\ &= (R_1 \downarrow A \cap R_2 \downarrow A)(y) \end{aligned}$$

□

7.26. Opmerking. Eigenschap 7.25 kan veralgemeend worden voor een familie $(R_i)_{i \in I}$ van L -vaagrelaties van X naar Y op de volgende manier:

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \uparrow A &\supseteq \bigcup_{i \in I} (R_i \uparrow A) \\ \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \downarrow A &\subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \downarrow A) \end{aligned}$$

en dus uiteraard ook

$$\left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \downarrow A \subseteq \bigcup_{i \in I} (R_i \downarrow A)$$

voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$. Als bovendien de eerste partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ duale supmorfismen zijn, dan is de tweede inclusie in werkelijkheid een gelijkheid. Voor alle y in Y geldt dan immers

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} (R_i \downarrow A)(y) &= \inf_{i \in I} (R_i \downarrow A)(y) \\ &= \inf_{i \in I} \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R_i(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{x \in X} \mathcal{I}(\sup_{i \in I} R_i(x, y), A(x)) \\ &= \inf_{x \in X} \mathcal{I}\left(\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)(x, y), A(x)\right) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) \downarrow A(y) \end{aligned}$$

Als bovendien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan kan op dezelfde manier bewezen worden dat de eerste inclusie in werkelijkheid een gelijkheid is.

De lijst van eigenschappen omtrent interactie van directe en superdirecte beelden met doorsnede en unie van L -vaagrelaties en L -vaagverzamelingen is zo uitgebreid dat men door de bomen misschien amper het bos nog kan zien. Om een enigszins goed overzicht te krijgen, hebben we de eigenschappen omtrent $\mathcal{T}_M$ -doorsnede en $\mathcal{S}_M$ -unie samengebracht in Tabel 7.1. Daarin worden direct en superdirect beeld genomen a.d.h.v. een t-norm $\mathcal{T}$ en een implicator $\mathcal{I}$ op een complete tralie L . A en B zijn L -vaagverzamelingen in X , terwijl R_1 en R_2 L -vaagrelaties van X naar Y zijn. In de tweede kolom geven we aan onder welke voorwaarde we de eigenschap uit de eerste kolom hebben kunnen aantonen. Sommige eigenschappen gelden steeds, voor andere hebben we een voldoende voorwaarde in termen van het morfismegedrag van de partiële afbeeldingen van de betrokken logische operator aangetoond. Wanneer zelfs dit niet mogelijk was, hebben we dat geïllustreerd met een voorbeeld. We merken tenslotte op dat, omwille van de reeds meerdere keren vermelde commutativiteit van $\mathcal{T}$ in de definitie van direct beeld, eigenschappen (1a) en (2a) volledig gelijk opgaan. Hetzelfde geldt voor eigenschappen (1c) en (2c), voor eigenschappen (3a) en (4a) en voor eigenschappen (3c) en (4c). Anders is het gesteld met het superdirect beeld: daar duiken b.v. gemengde eigenschappen op bij de interactie met unie en doorsnede van L -vaagrelaties.

Interactie met complement

Voor iedere scherpe relatie R van X naar Y en iedere scherpe deelverzameling A van X geldt, gebruik makend van (7.1) en (7.4),

$$\begin{aligned} R\uparrow(co\ A) &= \{y|y \in Y \wedge (\exists x \in X)(x \in co\ A \wedge (x, y) \in R)\} \\ &= \{y|y \in Y \wedge (\exists x \in X)(\neg(x \in A) \wedge (x, y) \in R)\} \\ &= \{y|y \in Y \wedge (\exists x \in X)(\neg(\neg(x, y) \in R \vee x \in A))\} \\ &= \{y|y \in Y \wedge \neg(\forall x \in X)((x, y) \in R \Rightarrow x \in A)\} \\ &= co(R\downarrow A) \end{aligned}$$

Het direct beeld van het complement van een verzameling onder een scherpe relatie is m.a.w. gelijk aan het complement van het superdirect beeld. Op analoge manier kan men eenvoudig aantonen dat $R\downarrow(co\ A) = co(R\uparrow A)$. Dit wekt de nieuwsgierigheid naar het gedrag van de L -vaagrelationele beelden t.o.v. het complement, genomen m.b.v. een negator $\mathcal{N}$ op L . Aangezien aan de ene zijde van de gelijkheid een triangulaire norm in het spel is, en aan de andere zijde een implicator, is het niet onwaarschijnlijk dat enige vorm van verband tussen die twee logische operatoren wel eens een voorwaarde zou kunnen zijn om de verbanden uit de verzamelingenleer te kunnen doortrekken naar de L -vaagverzamelingenleer.

Uit Hoofdstuk 2 kennen we twee manieren om vertrekkend van een t-norm $\mathcal{T}$ op een complete tralie een bijhorende implicator te bekomen: enerzijds kunnen we een residuele implicator construeren, en anderzijds m.b.v. een involutieve negator een S-implicator. Uit volgend voorbeeld blijkt dat we zelfs in dit geval niet vrij zijn om een willekeurige negator $\mathcal{N}$ te kiezen, willen we tot een verband analoog aan dat uit de scherpe verzamelingenleer komen.

Eigenschap	Voldoende voorwaarde	Bewijs
(1a) $R\uparrow(A \cap B) \subseteq R\uparrow A \cap R\uparrow B$ (1b) $R\downarrow(A \cap B) \subseteq R\downarrow A \cap R\downarrow B$ (1c) $R\uparrow(A \cap B) = R\uparrow A \cap R\uparrow B$ (1d) $R\downarrow(A \cap B) = R\downarrow A \cap R\downarrow B$	steeds geldig steeds geldig geen 2 ^e part. afb. van $\mathcal{I}$ zijn meetmorf.	Eigenschap 7.12 Eigenschap 7.12 Voorbeeld 7.9 Eigenschap 7.12
(2a) $(R_1 \cap R_2)\uparrow A \subseteq R_1\uparrow A \cap R_2\uparrow A$ (2b) $(R_1 \cap R_2)\downarrow A \supseteq R_1\downarrow A \cup R_2\downarrow A$ (2c) $(R_1 \cap R_2)\uparrow A = R_1\uparrow A \cap R_2\uparrow A$ (2d) $(R_1 \cap R_2)\downarrow A = R_1\downarrow A \cup R_2\downarrow A$	steeds geldig steeds geldig geen geen	Eigenschap 7.15 Eigenschap 7.15 cfr. Voorbeeld 7.9 Voorbeeld 7.16
(3a) $R\uparrow A \cup R\uparrow B \subseteq R\uparrow(A \cup B)$ (3b) $R\downarrow A \cup R\downarrow B \subseteq R\downarrow(A \cup B)$ (3c) $R\uparrow A \cup R\uparrow B = R\uparrow(A \cup B)$ (3d) $R\downarrow A \cup R\downarrow B = R\downarrow(A \cup B)$	steeds geldig steeds geldig part. afb. van $\mathcal{T}$ zijn joinmorf. geen	Eigenschap 7.22 Eigenschap 7.22 Eigenschap 7.22 Voorbeeld 7.21
(4a) $R_1\uparrow A \cup R_2\uparrow A \subseteq (R_1 \cup R_2)\uparrow A$ (4b) $R_1\downarrow A \cap R_2\downarrow A \supseteq (R_1 \cup R_2)\downarrow A$ (4c) $R_1\uparrow A \cup R_2\uparrow A = (R_1 \cup R_2)\uparrow A$ (4d) $R_1\downarrow A \cap R_2\downarrow A = (R_1 \cup R_2)\downarrow A$	steeds geldig steeds geldig part. afb. van $\mathcal{T}$ zijn joinmorf. 1 ^e part. afb. van $\mathcal{I}$ zijn duale joinmorf.	Eigenschap 7.25 Eigenschap 7.25 Eigenschap 7.25 Eigenschap 7.25

Tabel 7.1: Overzicht eigenschappen omtrent interactie met $\mathcal{T}_M$ -doorsnede en $\mathcal{S}_M$ -unie

7.27. Voorbeeld. Zij $X = \{x_1, x_2\}$. De vaagverzamelingen A en B in X zijn gedefinieerd als $A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0)\}$ en $B = \{(x_1, 0), (x_2, 1)\}$. De vaagrelatie R in X heeft als matrixvoorstelling

$$\begin{array}{c|cc} R & x_1 & x_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0.5 \\ x_2 & 0.5 & 1 \end{array}$$

Gebruiken we $\mathcal{T}_M$ en $\mathcal{I}_M$ om het direct en het superdirect beeld te nemen, dan geldt

$$R\downarrow_{co_{N_s}} A(x_1) = \min(\mathcal{I}_M(1, 0.6), \mathcal{I}_M(0.5, 1)) = 0.6$$

$$R\downarrow_{co_{N_s}} A(x_2) = \min(\mathcal{I}_M(0.5, 0.6), \mathcal{I}_M(1, 1)) = 1$$

$$co_{N_s}(R\uparrow A)(x_1) = \mathcal{N}_s \max(\mathcal{T}_M(0.4, 1), \mathcal{T}_M(0, 0.5)) = 0.6$$

$$co_{N_s}(R\uparrow A)(x_2) = \mathcal{N}_s \max(\mathcal{T}_M(0.4, 0.5), \mathcal{T}_M(0, 1)) = 0.6$$

waaruit blijkt

$$co_{N_s}(R\uparrow A) \subset R\downarrow_{co_{N_s}} A$$

Anderzijds

$$R\downarrow_{co_{N_s}} B(x_1) = \min(\mathcal{I}_M(1, 1), \mathcal{I}_M(0.5, 0)) = 0$$

$$R\downarrow_{co_{N_s}} B(x_2) = \min(\mathcal{I}_M(0.5, 1), \mathcal{I}_M(1, 0)) = 0$$

$$co_{N_s}(R\uparrow B)(x_1) = \mathcal{N}_s \max(\mathcal{T}_M(0, 1), \mathcal{T}_M(1, 0.5)) = 0.5$$

$$co_{N_s}(R\uparrow B)(x_2) = \mathcal{N}_s \max(\mathcal{T}_M(0, 0.5), \mathcal{T}_M(1, 1)) = 0$$

waaruit blijkt

$$R\downarrow_{co_{N_s}} B \subset co_{N_s}(R\uparrow B)$$

De negator die geïnduceerd wordt door $\mathcal{I}_M$ is niet $\mathcal{N}_s$ maar $\mathcal{N}_l$. Wanneer we de door de implicator geïnduceerde negator gebruiken, kunnen er wel verbanden uit de brand gesleept worden.

7.28. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator, dan geldt voor elke L -vaagrelatie R van X naar Y en elke L -vaagverzameling A in X

$$co_{N_{\mathcal{T}}}(R\uparrow A) \subseteq R\downarrow(co_{N_{\mathcal{T}}} A) \quad (7.9)$$

Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan geldt ook

$$R\uparrow(co_{N_{\mathcal{T}}} A) \subseteq co_{N_{\mathcal{T}}}(R\downarrow A) \quad (7.10)$$

Indien $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ bovendien involutief is, dan gelden de gelijkheden in (7.9) en (7.10).

Bewijs. Voor y in Y geldt

$$co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(R\uparrow A)(y) = \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(\sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R(x, y)))$$

Wegens de definitie van $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ en de commutativiteit van $\mathcal{T}$ is dus

$$co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(R\uparrow A)(y) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\sup_{x \in X} \mathcal{T}(R(x, y), A(x)), 0)$$

Met Hulpstelling 2.17 en het zwakke aftakkingsprincipe (Hulpstelling 2.54) leiden we hieruit af dat

$$co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(R\uparrow A)(y) \leq \inf_{x \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(x, y), \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(A(x), 0)) = R\downarrow(co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}A)(y)$$

waarmee (7.9) aangetoond is. De inclusie in (7.10) kan op analoge manier bewezen worden, gebruik makend van Hulpstelling 2.55 i.p.v. het zwakke aftakkingsprincipe.

Indien $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ involutief is, volgt uit (7.9) dat voor elke L -vaagverzameling A in X geldt

$$co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(R\downarrow(co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}A)) \subseteq R\uparrow A$$

en dus ook

$$co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(R\downarrow(co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}A))) \subseteq R\uparrow(co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}A)$$

of nog

$$co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}(R\downarrow A) \subseteq R\uparrow(co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}}A)$$

In combinatie met (7.10) volgt hieruit de gelijkheid in (7.10). De gelijkheid in (7.9) kan op analoge manier bewezen worden. $\square$

Indien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ geen supmorfismen zijn, dan gaat de inclusie (7.10) niet noodzakelijk op.

7.29. Voorbeeld. Gebruiken we voor het direct beeld b.v. de drastische t-norm $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ op $[0, 1]$, voor het superdirect beeld zijn residuele implicator $\mathcal{I}_{\mathbb{Z}}$ en voor het complement de geïnduceerde negator $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$. Stel $A(x) = 0.9$, voor alle x in X , en $R(x, y) = 0.7$ voor alle x in X en alle y in Y . Dan geldt voor alle y in Y dat $R\uparrow(co_{\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}}A)(y) = \mathcal{T}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(0.9), 0.7) = 0.7$ terwijl $co_{\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}}(R\downarrow A)(y) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{I}_{\mathbb{Z}}(0.7, 0.9)) = 0$. Hieruit volgt

$$co_{\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}}(R\downarrow A) \subset R\uparrow(co_{\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}}A)$$

7.30. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L , $\mathcal{N}$ een involutieve negator op L en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}$ de bijhorende S-implicator, dan gelden voor elke L -vaagrelatie R van X naar Y en elke L -vaagverzameling A in X

$$co_{\mathcal{N}}(R\uparrow A) = R\downarrow(co_{\mathcal{N}}A) \tag{7.11}$$

$$R\uparrow(co_{\mathcal{N}}A) = co_{\mathcal{N}}(R\downarrow A) \tag{7.12}$$

Bewijs. Voor y in Y geldt

$$co_{\mathcal{N}}(R\uparrow A)(y) = \mathcal{N}(\sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R(x, y)))$$

Wegens de commutativiteit van $\mathcal{T}$ en de involutiviteit van $\mathcal{N}$ geldt dus

$$co_{\mathcal{N}}(R\uparrow A)(y) = \mathcal{N}(\sup_{x \in X} \mathcal{T}(R(x, y), \mathcal{N}(\mathcal{N}(A(x)))))$$

Aangezien een involutieve negator een dual supmorfisme is, geldt dus ook

$$co_{\mathcal{N}}(R\uparrow A)(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{N}(\mathcal{T}(R(x, y), \mathcal{N}(\mathcal{N}(A(x)))))$$

m.a.w.

$$co_{\mathcal{N}}(R\uparrow A)(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}, \mathcal{N}}(R(x, y), \mathcal{N}(A(x)))$$

waaruit (7.11). Het bewijs van (7.12) verloopt volledig analoog. $\square$

Beeld van universum en lege verzameling

In een volgende eigenschap onderzoeken we hoe het gesteld is met het direct en het superdirect beeld van het universum en de lege verzameling.

7.31. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Voor elke L -vaagrelatie R van X naar Y geldt

$$R\uparrow\emptyset = \emptyset \text{ en } R\downarrow X = Y$$

Indien bovendien alle voorverzamelingen van R normaal zijn, dan

$$R\uparrow X = Y \text{ en } R\downarrow\emptyset = \emptyset$$

Bewijs. Voor alle y in Y geldt, o.m. wegens Hulpstellingen 2.25 en 2.33,

$$R\uparrow\emptyset(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(\emptyset(x), R(x, y)) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(0, R(x, y)) = \sup_{x \in X} 0 = 0 = \emptyset(y)$$

$$R\downarrow X(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), X(x)) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), 1) = \inf_{x \in X} 1 = 1 = Y(y)$$

Indien alle voorverzamelingen van R normaal zijn, dan bestaat er een x_0 in X zo dat $R(x_0, y) = 1$. Er geldt dan

$$R\uparrow X(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(X(x), R(x, y)) \geq \mathcal{T}(1, R(x_0, y)) = 1 = Y(y)$$

$$R\downarrow\emptyset(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), \emptyset(x)) \leq \mathcal{I}(R(x_0, y), 0) = 0 = \emptyset(y)$$

$\square$

De laatste twee gelijkheden gelden niet algemeen indien niet alle voorverzamelingen van de L -vaagrelatie R normaal zijn, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

7.32. Voorbeeld. Stel dat voor een bepaalde y in Y de vaagrelatie R gedefinieerd is als $R(x, y) = 0.5$, voor alle x in X . Dan zal

$$R\uparrow X(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(1, 0.5) = 0.5$$

Bovendien zal dan

$$R\downarrow \emptyset(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(0.5, 0)$$

wat b.v. voor $\mathcal{I} = \mathcal{I}_W$ eveneens 0.5 oplevert.

7.5 Eigenschappen van beelden onder L -vaagrelaties in één universum

In de vorige sectie was er steeds sprake van de beelden van A onder een L -vaagrelatie R van X naar Y . Terwijl A daarbij een L -vaagverzameling in X was, waren de beelden L -vaagverzamelingen in het universum Y , dat niet noodzakelijk hetzelfde was als X . Wanneer R een L -vaagrelatie is van X naar X zullen de beelden van A opnieuw L -vaagverzamelingen zijn in X , m.a.w. we verlaten X niet meer bij het nemen van beelden. In deze situatie rijzen onmiddellijk een aantal vragen: hoe verhouden A en haar beelden zich tot elkaar? Is er bvb. sprake van inclusie, van gelijkheid? Wat gebeurt er indien we het direct beeld onder R nemen van het superdirect beeld van A onder R (want ook dit wordt nu technisch mogelijk!)? In deze sectie geven we een aantal antwoorden op dergelijke vragen. Het blijkt dat het hiervoor interessant is om R te bedenken met een aantal kenmerken die voorbehouden zijn aan L -vaagrelaties van X naar X , zoals reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit.

Expansiviteit en restrictiviteit

Uit het bewijs van Eigenschap 7.3 weten we dat het superdirect beeld een deelverzameling is van het direct beeld wanneer alle R -voorverzamelingen normaal zijn. Zoals we opgemerkt hebben, is dit het geval voor een reflexieve L -vaagrelatie. De beelden van een L -vaagverzameling A in X onder zo'n L -vaagrelatie R zijn opnieuw L -vaagverzamelingen in X , wat het zinvol maakt om een mogelijke ordening tussen de oorspronkelijke L -vaagverzameling A en haar beelden te bestuderen. In het bijzonder hebben we de volgende eigenschap:

7.33. Eigenschap (Uitbreidend en beperkend). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder R een reflexieve L -vaagrelatie in X en A een L -vaagverzameling in X , dan geldt

$$R\downarrow A \subseteq A \subseteq R\uparrow A$$

Bewijs. Voor alle y in X :

$$\begin{aligned}
 R\downarrow A(y) &\leq \mathcal{I}(R(y, y), A(y)) \\
 &\leq \mathcal{I}(1, A(y)) \\
 &\leq A(y) \\
 &\leq \mathcal{T}(A(y), 1) \\
 &\leq \mathcal{T}(A(y), R(y, y)) \\
 &\leq R\uparrow A(y)
 \end{aligned}$$

□

Deze eigenschap werkt in zekere zin ook in de omgekeerde richting: als voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$ geldt dat $A \subseteq R\uparrow A$, dan is R reflexief. Men ziet in dat voor een willekeurige x in X geldt dat $R(x, x) = 1$ door $A = \{x\}$ te kiezen. Wegens het onderstelde geldt dan immers $A(x) \leq R(x, x)$. Als de gebruikte implicator $\mathcal{I}$ voldoet aan

$$(\forall (x, y) \in L^2)(x \leq y \Rightarrow \mathcal{I}(x, y) = 1) \quad (7.13)$$

dan volgt uit $R\downarrow A \subseteq A$ voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$ eveneens dat R reflexief is. Om aan te tonen dat voor een willekeurige y in X wel degelijk geldt dat $R(y, y) = 1$, kan men $A = Ry$ kiezen. Wegens het onderstelde geldt dan immers dat

$$\inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), R(x, y)) \leq R(y, y)$$

We merken hierbij op dat residuele implicatoren voldoen aan (7.13) (zie Hulpstelling 2.52).

7.34. Gevolg. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L , $\mathcal{I}$ een implicator op L en $\mathcal{N}$ een negator op L . Zij verder R een reflexieve L -vaagrelatie in X , dan geldt voor elke A in $\mathcal{F}_L(X)$

$$R\downarrow(\text{co}_{\mathcal{N}} A) \subseteq \text{co}_{\mathcal{N}} A \subseteq R\uparrow(\text{co}_{\mathcal{N}} A)$$

Indien $\mathcal{N}$ involutief is, geldt bovendien

$$\text{co}_{\mathcal{N}}(R\uparrow(\text{co}_{\mathcal{N}} A)) \subseteq A \subseteq \text{co}_{\mathcal{N}}(R\downarrow(\text{co}_{\mathcal{N}} A))$$

Idempotentie

7.35. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder R een $\mathcal{T}$ -transitieve L -vaagrelatie in X en A een L -vaagverzameling in X . Indien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan geldt

$$R\uparrow(R\uparrow A) \subseteq R\uparrow A$$

Indien de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ infmorfismen zijn, en het zwakke aftakkingsprincipe $\mathcal{I}(x, \mathcal{I}(y, z)) \geq \mathcal{I}(\mathcal{T}(x, y), z)$ voldaan is voor alle x, y en z in L , dan geldt

$$R\downarrow A \subseteq R\downarrow(R\downarrow A)$$

Bewijs. Voor alle y in X geldt

$$R\uparrow(R\uparrow A)(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(\sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), R(z, x)), R(x, y))$$

Aangezien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn geldt verder

$$\begin{aligned} R\uparrow(R\uparrow A)(y) &= \sup_{x \in X} \sup_{z \in X} \mathcal{T}(\mathcal{T}(A(z), R(z, x)), R(x, y)) \\ &= \sup_{z \in X} \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(z), \mathcal{T}(R(z, x), R(x, y))) \\ &= \sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), \sup_{x \in X} \mathcal{T}(R(z, x), R(x, y))) \end{aligned}$$

en dus wegens de $\mathcal{T}$ -transitiviteit van R

$$R\uparrow(R\uparrow A)(y) \leq \sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), R(z, y)) = R\uparrow A(y)$$

Voor alle y in Y geldt ook

$$R\downarrow(R\downarrow A)(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), \inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(z, x), A(z)))$$

Wegens de eisen opgelegd aan $\mathcal{I}$ geldt dus

$$\begin{aligned} R\downarrow(R\downarrow A)(y) &= \inf_{x \in X} \inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(x, y), \mathcal{I}(R(z, x), A(z))) \\ &\geq \inf_{z \in X} \inf_{x \in X} \mathcal{I}(\mathcal{T}(R(x, y), R(z, x)), A(z)) \end{aligned}$$

Zodat wegens Hulpstelling 2.17

$$R\downarrow(R\downarrow A)(y) \geq \inf_{z \in X} \mathcal{I}(\sup_{x \in X} \mathcal{T}(R(z, x), R(x, y)), A(z))$$

en dus wegens de $\mathcal{T}$ -transitiviteit van R

$$R\downarrow(R\downarrow A)(y) \geq \inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(z, y), A(z)) = R\downarrow A(y)$$

□

We merken hierbij op dat een t-norm en zijn residuele implicator voldoen aan het zwakke aftakkingsprincipe (zie Hulpstelling 2.54), evenals een t-norm en de eruit afgeleide S-implicator (m.b.v. een involutieve negator, zie Hulpstelling 2.41). Deze eigenschap is in zekere zin ook geldig in de omgekeerde richting. Stel dat $R\uparrow(R\uparrow A) \subseteq R\uparrow A$ geldt voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$, dan geldt voor alle y in X

$$\sup_{x \in X} \mathcal{T}(\sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), R(z, x)), R(x, y)) \leq \sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), R(z, y))$$

Wanneer we nu voor $A = \{w\}$, met w in X , kiezen reduceert bovenstaande uitdrukking zich tot

$$\sup_{x \in X} \mathcal{T}(R(w, x), R(x, y)) \leq R(w, y)$$

waaruit de $\mathcal{T}$ -transitiviteit van R volgt. Merk op dat het hierbij niet nodig is te veronderstellen dat de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn. Om ook een omgekeerde vorm van het verband tussen $\mathcal{T}$ -transitiviteit en superdirect beeld aan te tonen, veronderstellen we wel dat de gebruikte implicator $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ het rechterresiduüm is van een t-norm $\mathcal{T}$ waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn. Stel verder dat

$$R \downarrow A \subseteq R \downarrow (R \downarrow A)$$

geldt voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$, dan geldt voor alle y in X , door $A = Ry$ te kiezen,

$$\inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(z, y), R(z, y)) \leq \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), \inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(z, x), R(z, y)))$$

Wegens Hulpstelling 2.52 en 2.53 geldt dan voor alle x en y in X dat

$$R(x, y) \leq \inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(z, x), R(z, y))$$

of nog, voor alle x, y en z in X dat $R(x, y) \leq \mathcal{I}(R(z, x), R(z, y))$. Wegens de residueringsvoorwaarde (2.1) en de commutativiteit van $\mathcal{T}$ bekomen we tenslotte dat $\mathcal{T}(R(z, x), R(x, y)) \leq R(z, y)$ voor alle x, y en z in X . $\square$

Uit Eigenschappen 7.33 en 7.35 volgt nu onmiddellijk:

7.36. Gevolg (Idempotentie). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder R een L -vage $\mathcal{T}$ -preorde in X en A een L -vaagverzameling in X . Indien de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan geldt

$$R \uparrow (R \uparrow A) = R \uparrow A$$

Indien de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ infmorfismen zijn, en $\mathcal{I}(x, \mathcal{I}(y, z)) \geq \mathcal{I}(\mathcal{I}(x, y), z)$, voor alle x, y en z in L , dan geldt

$$R \downarrow (R \downarrow A) = R \downarrow A$$

Gemengde beelden

7.37. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator. Zij verder R een symmetrische en $\mathcal{T}$ -transitieve L -vaagrelatie in X . Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan geldt voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$

$$R \uparrow (R \downarrow A) \subseteq R \downarrow A$$

$$R \downarrow (R \uparrow A) \supseteq R \uparrow A$$

Bewijs. Voor y in X geldt

$$R \uparrow (R \downarrow A)(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(\inf_{z \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(z, x), A(z)), R(x, y))$$

wegens Hulpstelling 2.17 en 2.15 en de commutativiteit van $\mathcal{T}$

$$R\uparrow(R\downarrow A)(y) \leq \inf_{z \in X} \sup_{x \in X} \mathcal{T}(R(x, y), \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(z, x), A(z)))$$

Wegens Hulpstelling 2.55

$$R\uparrow(R\downarrow A)(y) \leq \inf_{z \in X} \sup_{x \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(x, y), R(z, x)), A(z))$$

Wegens Hulpstelling 2.17 en de symmetrie van R

$$R\uparrow(R\downarrow A)(y) \leq \inf_{z \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\inf_{x \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(y, x), R(x, z)), A(z))$$

M.b.v. Hulpstelling 2.76 volgt hieruit

$$R\uparrow(R\downarrow A)(y) \leq \inf_{z \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(y, z), A(z))$$

en dus wegens de symmetrie van R het gestelde. Anderzijds, uitgaande van

$$R\downarrow(R\uparrow A)(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(x, y), \sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), R(z, x)))$$

bekomen we met Hulpstelling 2.17 en 2.15 en de commutativiteit van $\mathcal{T}$

$$R\downarrow(R\uparrow A)(y) \geq \sup_{z \in X} \inf_{x \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(x, y), \mathcal{T}(R(z, x), A(z)))$$

Wegens Hulpstelling 2.55

$$R\downarrow(R\uparrow A)(y) \geq \sup_{z \in X} \inf_{x \in X} \mathcal{T}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(x, y), R(z, x)), A(z))$$

Wegens Hulpstelling 2.17 en de symmetrie van R

$$R\downarrow(R\uparrow A)(y) \geq \sup_{z \in X} \mathcal{T}(\inf_{x \in X} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(R(y, x), R(x, z)), A(z))$$

M.b.v. Hulpstelling 2.76 en de commutativiteit van $\mathcal{T}$

$$R\downarrow(R\uparrow A)(y) \geq \sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), R(y, z))$$

waaruit wegens de symmetrie van R het gestelde. $\square$

Wanneer we bovenstaande Eigenschap combineren met Eigenschap 7.33 komen we tot onderstaand gevolg.

7.38. Gevolg. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een t-norm op L en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator. Zij verder R een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie in X . Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dan geldt voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$

$$R\uparrow(R\downarrow A) = R\downarrow A$$

$$R\downarrow(R\uparrow A) = R\uparrow A$$

Gedrag t.o.v. drager en kern

Het probleem bij uitstek met de vaagwijzigers met zuivere nawijziging is hun gedrag t.o.v. kern en drager, meer bepaald het feit dat ze kern en drager niet wijzigen. We gaan nu na hoe de L -vaagrelationele beelden zich gedragen in dat opzicht.

7.39. Eigenschap (Gedrag t.o.v. de kern). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij R in $\mathcal{F}_L(X \times X)$ en A in $\mathcal{F}_L(X)$. Voor alle y in X geldt dan

- 1) Als $\ker(A) \cap \ker(Ry) \neq \emptyset$ dan $y \in \ker(R\uparrow A)$.
- 2) Als $\text{co}(\ker(A)) \cap \ker(Ry) \neq \emptyset$ dan $y \notin \ker(R\downarrow A)$

Bewijs.

- (1) Uit het gegeven volgt dat er een x_0 in X bestaat zo dat $A(x_0) = 1$ en $R(x_0, y) = 1$. Hieruit volgt $R\uparrow A(y) \geq \mathcal{T}(A(x_0), R(x_0, y)) = 1$.
- (2) Uit het gegeven volgt dat er een x_0 in X bestaat zo dat $A(x_0) < 1$ en $R(x_0, y) = 1$. Hieruit volgt $R\downarrow A(y) \leq \mathcal{I}(R(x_0, y), A(x_0)) < 1$. $\square$

7.40. Eigenschap (Gedrag t.o.v. de drager). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij R in $\mathcal{F}_L(X \times X)$ en A in $\mathcal{F}_L(X)$. Voor alle y in X geldt dan

- (1) Als $\ker(A) \cap \text{supp}(Ry) \neq \emptyset$ dan $y \in \text{supp}(R\uparrow A)$
- (2) Als $\text{co}(\text{supp}(A)) \cap \ker(Ry) \neq \emptyset$ dan $y \notin \text{supp}(R\downarrow A)$

Bewijs.

- (1) Uit het gegeven volgt dat er een x_0 in X bestaat zo dat $A(x_0) = 1$ en $R(x_0, y) > 0$. Hieruit volgt $0 < \mathcal{T}(A(x_0), R(x_0, y)) \leq R\uparrow A(y)$.
- (2) Uit het gegeven volgt dat er een x_0 in X bestaat zo dat $A(x_0) = 0$ en $R(x_0, y) = 1$. Hieruit volgt $0 = \mathcal{I}(R(x_0, y), A(x_0)) = R\downarrow A(y)$. $\square$

Deze eigenschappen wijzen een mogelijkheid aan waaronder de kern en de drager kunnen gewijzigd worden door het nemen van het direct of het superdirect beeld. Het volstaat b.v. dat een element uit de kern van Ry ook voorkomt in de kern van A opdat y tot de kern van $R\uparrow A$ zou behoren. Merk op dat daarbij helemaal niet vereist is dat y reeds tot de kern van A behoort. De gestelde voorwaarden zijn meestal nogal streng en niet nodig. Als de door $\mathcal{I}$ geïnduceerde negator $\mathcal{N}_l$ is, dan volstaat het b.v. al dat $\text{co}(\text{supp}(A)) \cap \text{supp}(Ry) \neq \emptyset$ opdat $y \notin \text{supp}(R\downarrow A)$. Kortom, bovenstaande eigenschappen geven hints hoe we de L -vaagrelatie R kunnen kiezen opdat kern en drager van A gewijzigd zouden worden bij het nemen van het direct en het superdirect beeld, maar we realiseren ons dat het meestal nog gemakkelijker is om een wijziging te veroorzaken dan deze eigenschappen op het eerste zicht doen uitschijnen. Soms moeten we zelfs

opletten dat de kern niet te veel gewijzigd wordt bij het nemen van het superdirect beeld. Vandaar de volgende eigenschap die aangeeft hoe de L -vaagrelatie R moet gekozen worden opdat de kern van A (ten dele) zou behouden blijven:

7.41. Eigenschap (Gedrag t.o.v. de kern). Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en $\mathcal{I}$ een impicator op L . Zij R in $\mathcal{F}_L(X \times X)$ en A in $\mathcal{F}_L(X)$. Als $\mathcal{I}(x, y) = 1$ voor alle x en y in L waarvoor $x \leq y$, dan geldt voor alle y in X

$$\text{Als } Ry \subseteq A \text{ dan } y \in \ker(R \downarrow A)$$

Bewijs. Vermits $Ry \subseteq A$ is wegens de onderstelling omtrent $\mathcal{I}$ voor alle x in X , $\mathcal{I}(Ry(x), A(x)) = 1$ waaruit het gestelde onmiddellijk volgt. $\square$

7.6 Inclusieve interpretatie

Representatieschema's

Dankzij het voorbereidend werk geleverd in Hoofdstuk 5 en in het eerste deel van dit hoofdstuk, kunnen we nu vrij rechttoe rechtaan komen tot context gebaseerde representaties van verzwakkende en versterkende wijzigers in de inclusieve interpretatie. De sleutel daartoe is een handige herformulering van de betekenis van gewijzigde linguïstische termen, en wel zo dat die formulering kan omgezet worden in een representatie in de L -vaagverzamelingenleer, daarbij gebruik makend van elementen die in de loop van dit proefschrift aangereikt zijn. Om het probleem te vereenvoudigen, vertrekken we in eerste instantie van een “scherp kader”.

We merken om te beginnen op dat een vrouw tamelijk mooi kan genoemd worden indien ze qua uiterlijk lijkt op een mooie vrouw. Op dezelfde manier wordt een huis tamelijk groot genoemd indien het lijkt op een groot huis, en kan iemand tamelijk volwassen genoemd worden indien hij of zij lijkt op een volwassene. Stel voor de eenvoud dat we een linguïstische term van een veranderlijke in een universum X representeren door een scherpe deelverzameling van X , b.v. P in $\mathcal{P}(X)$. Om de notie “lijken op” te modelleren maken we bovendien gebruik van een scherpe gelijkaardigheidsrelatie R op X , d.w.z. $R(x, y) = 1$ als x lijkt op y , en anders is $R(x, y) = 0$. Voor een willekeurig element y in X kunnen we dan stellen

$$\begin{aligned} y \in \text{tamelijk } P & \\ \Leftrightarrow \text{een element van } P \text{ lijkt op } y & \\ \Leftrightarrow (\exists x \in X)(x \in P \wedge R(x, y) = 1) & \\ \Leftrightarrow P \cap Ry \neq \emptyset & \end{aligned}$$

M.a.w. y behoort tot “tamelijk P ” als en slechts als $\text{OVERL}(P, Ry) = 1$. M.b.v. een L -vage gelijkaardigheidsrelatie E in X , kan dit nu als volgt veralgemeend worden voor een L -vaagverzameling A in X :

$$\text{tamelijk } A(y) = \text{OVERL}(A, Ey) = E \uparrow A(y) \quad (7.14)$$

Betekenis: y behoort tot “tamelijk A ” in de mate waarin A en de L -vaagverzameling van objecten die gelijken op y , overlappen.

We voeren nu een analoge redenering uit voor *zeer*. Voor de eenvoud vertrekken we weer vanuit een “scherp kader”, d.w.z. met een scherpe gelijkaardigheidsrelatie R in X en een scherp concept P in $\mathcal{P}(X)$. Voor y in X zeggen we

$$\begin{aligned} y \in \text{zeer } P \\ \Leftrightarrow \text{alle elementen waarop } y \text{ gelijk, behoren tot } P \\ \Leftrightarrow (\forall x \in X)(R(x, y) = 1 \Rightarrow x \in P) \\ \Leftrightarrow Ry \subseteq P \end{aligned}$$

In natuurlijke taal heeft het toepassen van een versterkende wijziger zoals *zeer* op een scherp concept gewoonlijk weinig of geen betekenis (wat moet men b.v. verstaan onder *zeer geboren*, *zeer gekocht*, *zeer getrouwd*, enz.?). Voor een vaag concept zoals *mooi*, kunnen we echter stellen dat een vrouw die gelijk op alle mooie vrouwen *zeer mooi* moet zijn. Of dat een auto die gelijk op alle dure auto's *zeer duur* moet zijn. Meer formeel definiëren we voor een L -vage gelijkaardigheidsrelatie E in X en A in $\mathcal{F}_L(X)$:

$$\text{zeer } A(y) = \text{INCL}(Ey, A) = E \downarrow A(y) \quad (7.15)$$

Betekenis: y behoort tot *zeer* A in de mate dat de objecten die lijken op y behoren tot A .

Er is niets dat ons belet om voor *tamelijk* en *zeer* dezelfde gelijkaardigheidsrelatie E te gebruiken. Wanneer we de t -norm en de implicator in functie van elkaar kiezen (b.v. een residuele of een S -implicator) en een bijpassende negator $\mathcal{N}$ uitzoeken, dan weten bovendien uit Eigenschap 7.28 en 7.30 dat er een verband is tussen b.v. $co_{\mathcal{N}}(R \downarrow A)$ en $R \uparrow (co_{\mathcal{N}} A)$, wat in de voorgestelde modellering representaties zouden kunnen zijn voor *niet zeer juist* en *tamelijk onjuist*. We kunnen momenteel enkel op de eigen intuïtie afgaan om te achterhalen of er in natuurlijke taal tussen deze twee expressies sprake is van gelijkheid of eerder van inclusie. We geven hierbij toe dat onze intuïtie niet zo duidelijk is op dit vlak. Belangrijker is echter op te merken dat indien een linguïstische studie deze of gene interpretatie zou uitwijzen, we er in onze representatie kunnen op inspelen: door de keuze van logische operatoren kunnen we hetzij gelijkheid, hetzij inclusie, of juist het gebrek eraan, afdwingen.

Niet alleen de eigenschappen m.b.t. interactie tussen L -vaagrelationele beelden en het complement hebben een bijzondere betekenis in het licht van de representatie van linguïstische wijzigers door L -vaagrelationele wijzigers. Ook de andere eigenschappen uit Sectie 7.4 kunnen in dit kader geïnterpreteerd worden. Wanneer en of voorgesteld worden a.d.h.v. doorsnede en unie respectievelijk, dan beschrijven de eigenschappen uit Sectie 7.4 en 7.4 verbanden tussen uitdrukkingen als *tamelijk duur* of *tamelijk ver* en *tamelijk (duur of ver)*, of als *zeer jong* en *zeer gemotiveerd* en *zeer (jong en gemotiveerd)*. Ook hier kan door keuze

van bepaalde logische operatoren de aanwezigheid of afwezigheid van een verband opgelegd worden. Wegens de reflexiviteit van de gelijkaardigheidsrelatie E volgt bovendien uit Eigenschap 7.33 dat

$$\text{zeer } A \subseteq A \subseteq \text{tamelijk } A$$

wat we in Hoofdstuk 3 leren kennen hebben als semantisch entailment.

De hierboven voorgestelde techniek voor de representatie van **zeer** kan in feite gebruikt worden voor elke versterkende wijziger; hetzelfde gaat op voor de representatie van **tamelijk** en elke verzwakkende wijziger. Om daarbij de orde zoals vooropgesteld in (3.1) te respecteren kunnen we, steunend op Eigenschap 7.7 ofwel “spelen” met de gebruikte L -vaagrelatie, ofwel met de gebruikte t -norm en implicator, ofwel met een combinatie van beide.

Optie 1. De eerste optie is om een tweede gelijkaardigheidsrelatie E_1 op X te introduceren zo dat $E \subseteq E_1$. Deze nieuwe L -vaagrelatie E_1 drukt een zwakkere gelijkaardigheid uit dan E zelf: als we E omschrijven als “gelijken op”, zou E_1 b.v. kunnen zijn “in de verte gelijken op”. We definiëren dan

$$\text{een beetje } A(y) = \text{OVERL}(A, E_1 y) = E_1 \uparrow A(y) \quad (7.16)$$

$$\text{extreem } A(y) = \text{INCL}(E_1 y, A) = E_1 \downarrow A(y) \quad (7.17)$$

Betekenis: de betekenis van (7.16) en (7.17) is te vergelijken met die van (7.14) en (7.15) met dat verschil dat de gelijkaardigheidsrelatie die optreedt in deze laatste twee expressies strenger is. y behoort tot **een beetje** A in de mate waarin y in de verte gelijkt op een element van A . Anderzijds behoort y tot **extreem** A indien alle elementen die in de verte gelijken op y behoren tot A . Het is voor een element x uiteraard niet moeilijker om in de verte te lijken op y dan te lijken op y . De voorwaarde dat er een x bestaat die in de verte lijkt op y zal dan ook makkelijker vervuld zijn dan de voorwaarde dat er een x bestaat die lijkt op y . Dit reflecteert het feit dat **een beetje** verzwakkender is dan **tamelijk**. Anderzijds is het moeilijker er voor te zorgen dat alle elementen die in de verte lijken op y ook nog allemaal tot A behoren. Hierin wordt het sterkere karakter van **extreem** t.o.v. **zeer** weerspiegeld.

Optie 2. Een tweede mogelijkheid is om een tweede triangulaire norm $\mathcal{T}_1$ en een tweede implicator $\mathcal{I}_1$ te introduceren, en wel zo dat $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ en $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}$; het gaat dus om een grotere t -norm en een kleinere implicator. We definiëren dan:

$$\text{een beetje } A(y) = \text{OVERL}(A, Ey) = E \uparrow_{\mathcal{T}_1} A(y) \quad (7.18)$$

$$\text{extreem } A(y) = \text{INCL}(Ey, A) = E \downarrow_{\mathcal{I}_1} A(y) \quad (7.19)$$

Betekenis: de betekenis van (7.18) en (7.21) is te vergelijken met die van (7.14) en (7.15) met dat verschil dat we een lichtere vorm van overlap maar een grotere vorm van inclusie eisen van enerzijds de L -vaagverzameling van objecten die lijken op y , en anderzijds de te wijzigen L -vaagverzameling A .

Optie 3. Nog een andere mogelijkheid, die volledig steunt Eigenschap 7.33, bestaat erin om voor alle vier de linguïstische wijzigers gebruik te maken van dezelfde gelijkaardigheidsrelatie en dezelfde t-norm en implicator, maar

$$\text{een beetje } A(y) = E\uparrow(E\uparrow A)(y) \quad (7.20)$$

$$\text{extreem } A(y) = E\downarrow(E\downarrow A)(y) \quad (7.21)$$

Betekenis: een beetje A wordt gezien als tamelijk tamelijk A , terwijl extreem A overeenkomt met zeer zeer A .

Voor elk van bovenstaande opties bekommen we dus, dankzij Eigenschap 7.7 en 7.33

$$\text{extreem } A \subseteq \text{zeer } A \subseteq \text{tamelijk } A \subseteq \text{een beetje } A \quad (7.22)$$

Het spreekt voor zich dat de technieken allemaal kunnen gecombineerd worden: voor de representatie van een beetje A kan b.v. gebruik gemaakt worden van een grotere gelijkaardigheidsrelatie E_1 en een grotere t-norm $\mathcal{T}_1$, terwijl we voor de representatie van extreem A optie 3 zouden kunnen combineren met de keuze voor een kleinere implicator. Een hybride aanpak die alledrie de opties combineert kan uiteraard ook. Onze persoonlijke voorkeur voor de drie mogelijkheden is in volgorde optie 3, optie 1 en optie 2. Optie 2 vereist immers opnieuw een keuze voor logische operatoren wat, zoals we al meerdere malen aangehaald hebben, meestal sowieso een moeilijk vraagstuk is bij het ontwikkelen van een toepassing. Bij de eerste aanpak moet een nieuwe gelijkaardigheidsrelatie geïntroduceerd worden, wat ons makkelijker lijkt omdat de rol en de semantiek van de L -vaagrelatie in het representationeel schema beter te begrijpen en dus te manipuleren is. De derde optie vereist helemaal geen introductie van nieuwe “ingrediënten” en is op dat vlak dus zeker de eenvoudigste; de semantiek is ook erg duidelijk. Voor een bepaalde keuze van de logische operatoren, kan optie 3 trouwens nog vanuit een andere invalshoek bekeken worden. Om dit toe te lichten maken we gebruik van een eigenschap omtrent associativiteit van het samenstellen van L -vaagrelaties.

7.42. Eigenschap (Associativiteit). [18] Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L en $\mathcal{I}$ een implicator op L . Zij verder Q een L -vaagrelatie van X naar Y , R een L -vaagrelatie van Y naar Z en S een L -vaagrelatie van Z naar U . Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn dan geldt

$$Q \circ_{\mathcal{T}} (R \circ_{\mathcal{T}} S) = (Q \circ_{\mathcal{T}} R) \circ_{\mathcal{T}} S$$

Als de eerste partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ duale supmorfismen zijn, de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ infmorfismen zijn en bovendien voldaan is aan het aftakkingsprincipe $\mathcal{I}(\mathcal{T}(x, y), z) = \mathcal{I}(x, \mathcal{I}(y, z))$ voor alle x, y en z in L , dan geldt

$$Q \triangleright_{\mathcal{I}} (R \circ_{\mathcal{T}} S) = (Q \triangleright_{\mathcal{I}} R) \triangleright_{\mathcal{I}} S$$

Onder de juiste voorwaarden voor de logische operatoren (zie Eigenschap 7.42) geldt dan wegens Eigenschap 7.6

$$\begin{aligned}
 \overleftarrow{E\downarrow(E\downarrow A)} &= (\overleftarrow{E\downarrow A}) \triangleright_{\mathcal{I}} E \\
 &= (\overleftarrow{A} \triangleright_{\mathcal{I}} E) \triangleright_{\mathcal{I}} E \\
 &= \overleftarrow{A} \triangleright_{\mathcal{I}} (E \circ_{\mathcal{T}} E) \\
 &= \overleftarrow{(E \circ_{\mathcal{T}} E)\downarrow A}
 \end{aligned}$$

Men gaat eenvoudig na dat twee L -vaagverzamelingen met gelijke linkeruitbreidingen gelijk zijn. Er geldt dus

$$E\downarrow(E\downarrow A) = (E \circ_{\mathcal{T}} E)\downarrow A$$

voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$ en voor alle E in $\mathcal{F}_L(X \times X)$. M.a.w. twee maal na elkaar het superdirect beeld nemen van A onder E komt neer op één maal het superdirect beeld nemen van A onder de samengestelde L -vaagrelatie $E \circ_{\mathcal{T}} E$. Als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, kan op dezelfde manier aangetoond worden dat

$$E\uparrow(E\uparrow A) = (E \circ_{\mathcal{T}} E)\uparrow A$$

Twee maal na elkaar het direct beeld nemen is dus hetzelfde als het direct beeld nemen onder de samengestelde L -vaagrelatie.

Merk op dat we een probleem zouden hebben indien benaderende gelijkheid zou voorgesteld zijn door een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie i.p.v. door een gelijk-aardigheidsrelatie. Wegens Gevolg 7.36 geldt voor elke $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie R immers dat

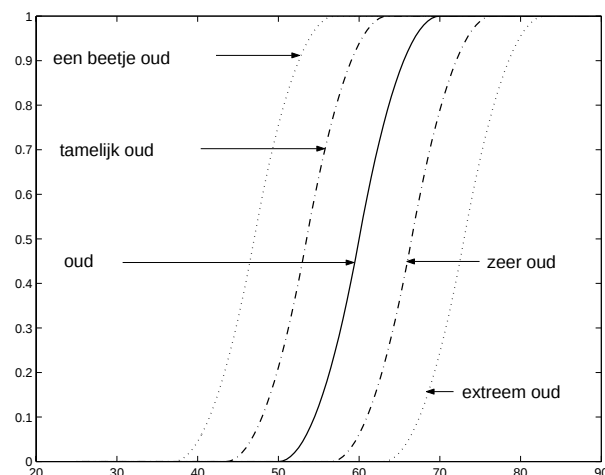
$$R\uparrow(R\uparrow A) = R\uparrow A$$

en

$$R\downarrow(R\downarrow A) = R\downarrow A$$

zodra een mooie triangulaire norm (waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn) en zijn residuele implicator gebruikt worden. In dit geval zouden de eerste en de laatste inclusie in uitdrukking (7.22) gelijkheden zijn. Dit zou niet alleen optie 3 uitsluiten, maar ook impliceren dat b.v. in de vanuit (7.15) voorgestelde representatie, **zeer zeer** A hetzelfde betekent als **zeer** A , wat intuïtief gezien zeker niet het geval is. Ook deze bevinding wijst weer in de richting van de bewering uit Hoofdstuk 5 dat $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties geen goede representatie zijn voor benaderende gelijkheid.

Het is de aandachtige lezer ondertussen wellicht opgevallen dat de operatoren $R\uparrow$. en $R\downarrow$. die het direct en het superdirect beeld onder een L -vaagrelatie R nemen, voldoen aan Definitie 3.4 van L -vaagwijziger in X . We zullen vanaf nu dan ook spreken over L -vaagrelationele wijzigers.



Figuur 7.1: Lidmaatschapsfuncties voor oud en gewijzigde termen

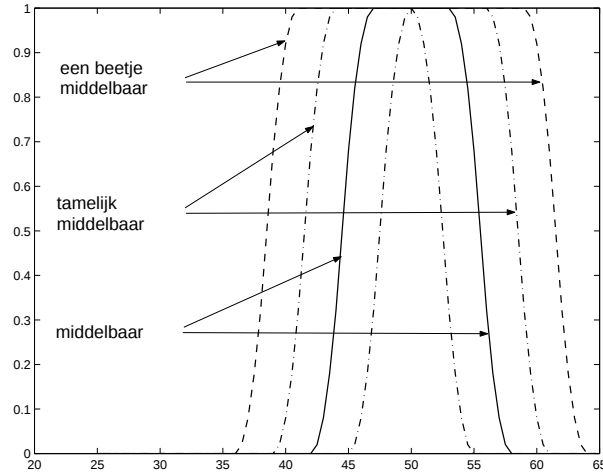
Voorbeelden

We zullen nu a.d.h.v. een aantal voorbeelden de lezer proberen overtuigen van de grote en uniforme kracht van de hierboven voorgestelde L -vaagwijzigers. In Voorbeelden 7.43, 7.44 en 7.45 zullen we tonen hoe hiermee mooie resultaten tot stand komen wanneer de linguïstische termen voorgesteld worden door vaagverzamelingen in een universum dat een deelverzameling is van $\mathbb{R}$, zoals zo vaak gebruikt in vaagcontrole- en vaagexpertsystemen. We zullen daarbij illustreren hoe onze aanpak opmerkelijk beter is dan de traditionele vaagwijzigers, enerzijds op vlak van betekenis en anderzijds op vlak van uniformiteit en gebruiksgemak.

In niet-numerieke universa zijn traditionele vaagwijzigers gebaseerd op voorwijziging moeilijk te gebruiken omwille van een gebrek aan operatoren op het universum in kwestie. In Voorbeeld 7.46 zullen we tonen dat de vaagwijzigers gebaseerd op gelijkaardigheidsrelaties kunnen toegepast worden met hetzelfde gemak als in numerieke universa, en dat ze bovendien een grotere semantische kracht hebben dan alle vaagwijzigers met zuivere nawijziging.

In Voorbeeld 7.47 zullen we ook werken met een niet-numeriek universum maar, om de uitdaging nog wat groter te maken, zullen we de verzameling van lidmaatschapsgraden van $[0, 1]$ veralgemenen tot een complete tralie L , wat toelaat om te gaan met informatie die onvergelykbaar is m.b.t. de te representeren linguïstische termen. Voor zover we weten zijn de L -vaagwijzigers gebaseerd op L -vaagrelaties de eerste die geschikt zijn om die modelleringstaak met succes uit te voeren.

7.43. Voorbeeld. Figuur 7.1 toont de lidmaatschapsfunctie van de vaagverzameling A voor de term *oud* in het universum van leeftijden. De lidmaatschapsfuncties van *tamelijk oud* en *een beetje oud* komen overeen met de vaagverzame-



Figuur 7.2: Lidmaatschapsfuncties voor middelbaar en gewijzigde termen

lingen $E\uparrow A$ en $E\uparrow(E\uparrow A)$ respectievelijk, waarbij gebruik gemaakt werd van de t-norm $\mathcal{T}_W$ en de gelijkaardigheidsrelatie E gedefinieerd als

$$E(x, y) = \min(1, \max(0, 3 - 0.3|x - y|))$$

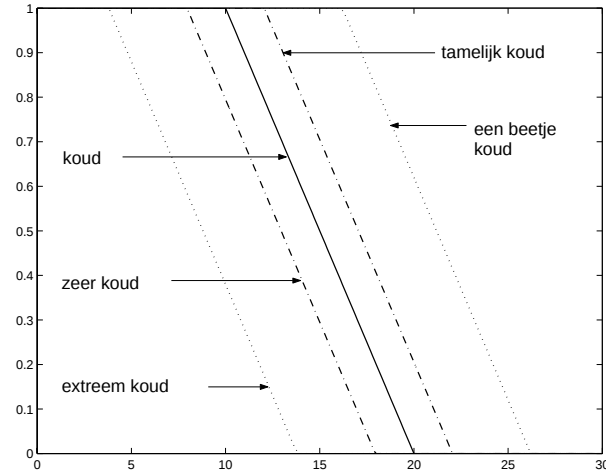
voor alle x en y in $[0, 130]$. De lidmaatschapsfuncties van *zeer oud* en *extreem oud* in Figuur 7.1 komen overeen met de vaagverzamelingen $E\downarrow A$ en $E\downarrow(E\downarrow A)$ respectievelijk, waarbij gebruik gemaakt werd van de implicator $\mathcal{I}_W$.

Het valt in bovenstaand voorbeeld op dat de kernen en de dragers van alle vaagverzamelingen in kwestie verschillend zijn. Een dergelijk effect kan men niet verkrijgen door gebruik te maken van vaagwijzigers met zuivere nawijziging. Omdat de lidmaatschapsfunctie voor *oud* stijgend is, is het wel mogelijk zo een resultaat te bekomen met verschuivende vaagwijzigers. Deze vaagwijzigers kan men voor een juiste inclusieve interpretatie echter niet steeds zonder meer toepassen indien de te wijzigen lidmaatschapsfuncties noch stijgend, noch dalend zijn. Het volgende voorbeeld illustreert hoe de vaagrelationele wijzigers wel goed werken voor dit soort lidmaatschapsfuncties.

7.44. Voorbeeld. Figuur 7.2 beeldt de lidmaatschapsfunctie af van de vaagverzameling A voor de term *middelbaar* in het universum van leeftijden. De lidmaatschapsfuncties van *tamelijk middelbaar* en *een beetje middelbaar* komen overeen met de vaagverzamelingen $E\uparrow A$ en $E\uparrow(E\uparrow A)$ respectievelijk, waarbij gebruik gemaakt werd van de t-norm $\mathcal{T}_W$ en de gelijkaardigheidsrelatie E gedefinieerd als

$$E(x, y) = \min(1, \max(0, 2.5 - 0.5|x - y|))$$

voor alle x en y in $[0, 130]$. De “binnenste” lidmaatschapsfunctie in Figuur 7.2 is $E\downarrow A$, waarbij gebruik gemaakt werd van de implicator $\mathcal{I}_W$.



Figuur 7.3: Lidmaatschapsfuncties in het universum van temperaturen

7.45. Voorbeeld. Figuur 7.3 beeldt de lidmaatschapsfunctie af van de vaagverzameling A voor de term *koud* in het universum van temperaturen in de maand mei in een bepaalde streek. De lidmaatschapsfuncties van *tamelijk koud* en *zeer koud* komen overeen met de vaagverzamelingen $E \uparrow A$ en $E \downarrow A$ respectievelijk, waarbij gebruik gemaakt werd van de t-norm $\mathcal{T}_W$, zijn residuele implicator $\mathcal{I}_W$ en de gelijkaardigheidsrelatie E gedefinieerd als

$$E(x, y) = \pi(x; y - 4, y - 2, y + 2, y + 4)$$

voor alle x en y in $[0, 30]$. Voor de lidmaatschapsfuncties van *een beetje koud* en *extreem koud* gebruikten we $E_1 \uparrow A$ en $E_1 \downarrow A$ met

$$E_1(x, y) = \pi(x; y - 10, y - 6, y + 6, y + 10)$$

Hierbij werden opnieuw $\mathcal{T}_W$ en $\mathcal{I}_W$ gebruikt. Om het effect van de keuze voor een gelijkaardigheidsrelatie duidelijk naar voor te laten komen, hebben we daarbij de vaagrelatie E opzettelijk nogal klein gehouden, en de vaagrelatie E_1 nogal groot gemaakt.

7.46. Voorbeeld. Stel dat in het universum van de sprookjesfiguren

$$X = \{\text{sneeuwwitje, heks, wolf, dwerg, prins, roodkapje}\}$$

de vaagverzamelingen *mooi*, *doorsnee* en *lelijk* gegeven worden door:

	sneeuwwitje	heks	wolf	dwerg	prins	roodkapje
mooi	1.00	0.00	0.00	0.10	0.80	0.50
doorsnee	0.00	0.30	0.00	0.70	0.20	0.50
lelijk	0.00	0.70	1.00	0.20	0.00	0.00

Benaderende gelijkheid kan in dit universum gemodelleerd worden door de vaagrelatie E (zie Voorbeeld 5.25):

E	sneeuwwitje	heks	wolf	dwerg	prins	roodkapje
sneeuwwitje	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.50
heks	0.00	1.00	1.00	0.50	0.00	0.00
wolf	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
dwerg	0.00	0.50	0.00	1.00	0.00	0.88
prins	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
roodkapje	0.50	0.00	0.00	0.88	1.00	1.00

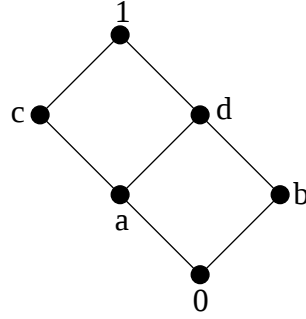
Gebruik makend van $\mathcal{T}_P$ en $\mathcal{I}_P$, verkrijgen we met de vaagrelationele wijzigers dan de volgende lidmaatschapsgraden voor de gewijzigde termen:

	sneeuwwitje	heks	wolf	dwerg	prins	roodkapje
tamelijk mooi	1.00	0.05	0.00	0.44	1.00	0.80
tamelijk doorsnee	0.25	0.35	0.30	0.70	0.50	0.61
tamelijk lelijk	0.00	1.00	1.00	0.35	0.00	0.18
zeer mooi	0.80	0.00	0.00	0.00	0.50	0.11
zeer doorsnee	0.00	0.00	0.00	0.57	0.00	0.00
zeer lelijk	0.00	0.40	0.70	0.00	0.00	0.00

Hierbij valt op dat de heks, die lelijk is in de mate 0.7, tamelijk lelijk is in de mate 1 omwille van haar gelijkenis met de wolf die lelijk is in de mate 1. Een dergelijk resultaat kan nooit bekomen worden met vaagwijzigers gebaseerd op zuivere nawijziging.

7.47. Voorbeeld. Iemands lievelingsingrediënten voor een dessert zouden chocola, vanille-ijs en marsepein kunnen zijn. Afhankelijk van de af- of aanwezigheid van een of meerdere van deze ingrediënten kan een dessert lekker genoemd worden in een lagere of hogere mate. We gaan ervan uit dat het toevoegen van een ingrediënt het dessertbord lekkerder maakt. Zo valt een vanille-ijsje met een beetje chocola lekkerder uit dan een gewoon vanille-ijsje. Er een brokje marsepein aan toevoegen maakt het geheel nog lekkerder. Anderzijds kan het zo goed als onmogelijk zijn om te zeggen of een vanille-ijsje met chocola minder of meer lekker is dan een vanille-ijsje met marsepein. Merk op dat we niet gemakkelijheidshalve kunnen zeggen dat ze lekker zijn in dezelfde mate, want dan zou uit de hierboven besproken ordening volgen dat vanille-ijs met marsepein lekkerder is dan chocola, hoewel we geen echte reden hebben om dit te veronderstellen.

Omwille van de onvergelykbaarheid van sommige dessertborden is $[0, 1]$ -vaagverzamelingenleer ontoereikend voor het modelleren van de term lekker in het universum van dessertborden X . We stellen dan ook voor om deze term te representeren d.m.v. een L -vaagverzameling A in X , met L bepaald door het Hassediagram uit Figuur 7.4. Voor de eenvoud in notatie zullen we de afkortingen C (chocola), V (vanille-ijs) en M (marsepein) gebruiken. Bovendien verwijst een concatenatie van ingrediëntensymbolen naar een gecombineerd bord: CV

Figuur 7.4: Tralie $L = \{0, a, b, c, d, 1\}$

R	V	C	CV	VM	CVM
V	1	0	c	c	0
C	0	1	c	0	0
CV	c	c	1	0	c
VM	c	0	0	1	c
CVM	0	0	c	c	1

Tabel 7.2: L -vaagrelatie R voor benaderende gelijkheid in X

verwijst b.v. naar een dessert met chocola en vanille. Lekker kan dan b.v. voorgesteld worden door de L -vaagverzameling

$$A = \{(V, a), (C, b), (CV, d), (VM, c), (CVM, 1)\}$$

in het universum van de dessertborden $X = \{C, V, M, CV, VM, CVM\}$. Tabel 7.2 is de matrixvoorstelling van een reflexieve en symmetrische L -vaagrelatie R die benaderende gelijkheid modelleert in X . Elk dessertbord wordt beschouwd als ongeveer gelijk aan zichzelf in de hoogste mate 1 (reflexiviteit). Als twee dessertborden niet exact gelijk zijn maar als door toevoeging van één ingrediënt aan één van de twee het andere ontstaat, dan worden ze beschouwd als ongeveer gelijk in de mate c . Zo is b.v. $R(C, CV) = c$, $R(CVM, VM) = c$ enz. Anders worden ze beschouwd als niet ongeveer gelijk, d.w.z. ongeveer gelijk in de laagste mate l . Tabel 7.3 geeft de t-norm $\mathcal{T}_M$ op de tralie L uit Figuur 7.4, evenals zijn residuele implicator $\mathcal{I}_M$. Gebruik makend van deze logische operatoren en deze L -vaagrelatie, kunnen de lidmaatschapsgraden van alle dessertborden in de L -vaagverzamelingen tamelijk lekker en zeer lekker berekend worden. Zo is b.v.

$$\begin{aligned}
 R \uparrow A(V) &= \sup\{\mathcal{T}_M(R(V, V), A(V)), \mathcal{T}_M(R(C, V), A(C)), \\
 &\quad \mathcal{T}_M(R(CV, V), A(CV)), \mathcal{T}_M(R(VM, V), A(VM)), \\
 &\quad \mathcal{T}_M(R(CVM, V), A(CVM))\} \\
 &= \sup\{\mathcal{T}_M(1, a), \mathcal{T}_M(0, b), \mathcal{T}_M(c, d), \mathcal{T}_M(c, c), \mathcal{T}_M(0, 1)\} \\
 &= \sup\{a, 0, a, c, 0\} = c
 \end{aligned}$$

$\mathcal{T}_M$	0	a	b	c	d	1	$\mathcal{I}_M$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
a	0	a	0	a	a	a	a	b	1	b	1	1	1
b	0	0	b	0	b	b	b	c	c	1	c	1	1
c	0	a	0	c	a	c	c	b	d	b	1	d	1
d	0	a	b	a	d	d	d	0	c	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1	1	0	a	b	c	d	1

Tabel 7.3: T-norm en implicator op $L = \{0, a, b, c, d, 1\}$

terwijl b.v.

$$\begin{aligned}
R\downarrow A(CV) &= \inf\{\mathcal{I}_M(R(V, CV), A(V)), \mathcal{I}_M(R(C, CV), A(C)), \\
&\quad \mathcal{I}_M(R(CV, CV), A(CV)), \mathcal{I}_M(R(VM, CV), A(VM)), \\
&\quad \mathcal{I}_M(R(CVM, CV), A(CVM))\} \\
&= \inf\{\mathcal{I}_M(c, a), \mathcal{I}(c, b), \mathcal{I}_M(1, d), \mathcal{I}_M(0, c), \mathcal{I}_M(c, 1)\} \\
&= \inf\{d, b, d, 1, 1\} = b
\end{aligned}$$

De andere lidmaatschapsgraden kunnen op dezelfde manier berekend worden, zodat we tenslotte verkrijgen

$$\text{tamelijk } A = R\uparrow A = \{(V, c), (C, d), (CV, 1), (VM, c), (CVM, 1)\}$$

$$\text{zeer } A = R\downarrow A = \{(V, a), (C, b), (CV, b), (VM, a), (CVM, d)\}$$

Het semantisch entailment is duidelijk: $R\uparrow$ — gebruikt om de verzwakkende wijziger **tamelijk** te modelleren — behoudt of verhoogt de oorspronkelijke lidmaatschapsgraden, terwijl $R\downarrow$ — gebruikt om de versterkende wijziger **zeer** te representeren — veroorzaakt een verlaging.

7.7 Niet-inclusieve interpretatie

Van de traditionele vaagwijzigers behoren de verschuivende tot de beste voor het modelleren van linguïstische wijzigers in de niet-inclusieve interpretatie (er van uit gaande dat het universum een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is). Verschuivende vaagwijzigers zijn vaagwijzigers met zuivere voorwijziging. De volgende eigenschap legt een verband tussen dit soort L -vaagwijzigers en het direct L -vaagrelationeel beeld.

7.48. Eigenschap. Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L . Zij verder m een vaagwijziger in X met zuivere voorwijziging. Als t de voorwijziger van m is, en R_m de inverse relatie van t , d.w.z.

$$R_m(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x = t(y) \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

voor alle x en y in X , dan geldt $m(A) = R_m\uparrow A$ voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$.

Bewijs. Voor y in X geldt

$$R_m \uparrow A(y) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R_m(x, y)) = \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(t(y)), 1) = m(A)(y)$$

□

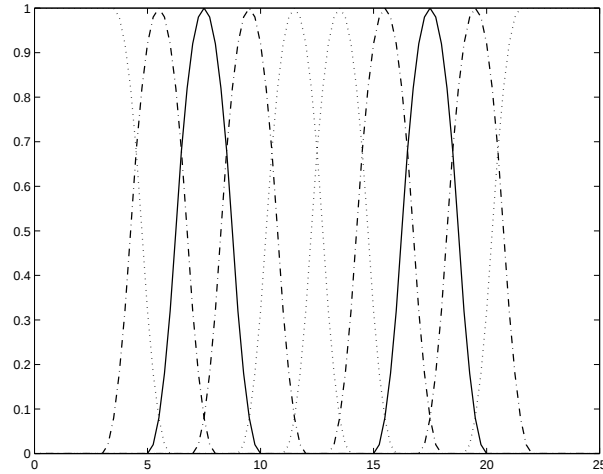
Door een geschikte keuze van L -vaagrelatie kunnen de L -vaagrelationele wijzigers het gedrag van de L -vaagwijzigers met zuivere voorwijziging dus volledig nabootsen. Merk op dat het daarbij geen rol speelt welke triangulaire norm we gebruiken. Een verschuivende vaagwijziger in $\mathbb{R}$ kan dus opgevat worden als een vaagrelationele wijziger die het direct beeld neemt onder de vaagrelatie R_{S_α} , gedefinieerd als

$$R_{S_\alpha}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x = y - \alpha \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

voor alle x en y in $\mathbb{R}$. De waarde van de reële parameter α bepaalt daarbij de grootte van de verschuiving, evenals de richting. Zoals we in Hoofdstuk 3 besproken hebben, worden de termen in de niet-inclusieve interpretatie voorgesteld door gedeeltelijk stijgende en gedeeltelijk dalende lidmaatschapsfuncties (b.v. π -functies), behalve de termen “aan de uiteinden van het universum”. De term aan het linkeruiteinde wordt immers voorgesteld door een dalende lidmaatschapsfunctie, de term aan het rechteruiteinde door een stijgende. Als het universum een eindig interval in $\mathbb{R}$ is, dan kan dit effect aan de uiteinden bekomen worden door het universum tijdelijk te vergroten tot $\mathbb{R}$, de lidmaatschapsfunctie voor een atomaire term ver genoeg naar links te verschuiven zodat het stijgende deel buiten het oorspronkelijk universum valt en vervolgens het universum weer te beperken. Een analoge werkwijze kan gevolgd worden voor het rechteruiteinde. Als het universum gans $\mathbb{R}$ is, of een zeer groot interval in $\mathbb{R}$, kan deze techniek onbruikbaar zijn. Denken we b.v. aan een toepassing waarbij in theorie percentages kunnen voorkomen van 1 tot 100 maar in de praktijk de percentages zo goed als altijd rond 5 liggen. Het universum is in dit geval $[0, 100]$ en de vaagverzameling hoog zou kunnen voorgesteld worden door $\pi(\cdot; 5, 6, 6, 7)$. Het is duidelijk dat met de hierboven geschetste techniek hoog veel te ver naar rechts zou moeten verschoven worden, waardoor het bekomen resultaat geen zinvolle representatie voor extreem hoog meer zou zijn. We hebben m.a.w. nood aan vaagwijzigers die behalve een verschuiving ook een verandering in de vorm van de lidmaatschapsfunctie kunnen veroorzaken. Door nu kleine wijzigingen aan te brengen in de relatie R_{S_α} ontstaan nieuwe relaties die aanleiding geven tot dergelijke vaagrelationele wijzigers:

$$R_{K_\alpha}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \leq y - \alpha \\ 0, & \text{elders} \end{cases} \quad R_{G_\alpha}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \geq y - \alpha \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

voor alle x en y in $\mathbb{R}$. De directe beelden onder deze vaagrelaties hebben het



Figuur 7.5: Linguïstische termen in het universum van prijzen van taarten (van links naar rechts: extreem laag, zeer laag, laag, tamelijk laag, een beetje laag, tamelijk hoog, hoog, zeer hoog, extreem hoog)

volgende effect op π -functies:

α	R	Effect
$\alpha > 0$	R_{S_α}	verschuiving naar rechts
$\alpha > 0$	R_{K_α}	verschuiving naar rechts + verandering van vorm
$\alpha < 0$	R_{S_α}	verschuiving naar links
$\alpha < 0$	R_{G_α}	verschuiving naar links + verandering van vorm

7.49. Voorbeeld. De termen laag en hoog in het universum van de prijzen van taarten (uitgedrukt in EUR) kunnen b.v. voorgesteld worden door de vaagverzamelingen $A = \pi(.; 5, 7.5, 7.5, 10)$ en $B = \pi(.; 15, 17.5, 17.5, 20)$ respectievelijk. Voor de representatie van de gewijzigde termen in de niet-inclusieve interpretatie stellen we dan voor

term	vaagverzameling	term	vaagverzameling
extreem laag	$R_{G_{-4}} \uparrow A$	extreem hoog	$R_{K_4} \uparrow B$
zeer laag	$R_{S_{-2}} \uparrow A$	zeer hoog	$R_{S_2} \uparrow B$
laag	A	hoog	B
tamelijk laag	$R_{S_2} \uparrow A$	tamelijk hoog	$R_{S_{-2}} \uparrow B$
een beetje laag	$R_{S_4} \uparrow A$	een beetje hoog	$R_{S_{-4}} \uparrow B$

Deze vaagverzamelingen zijn afgebeeld in Figuur 7.5.

Hoofdstuk 8

Gewijzigde vaagverzamelingen in een ruimer kader

De weg van
een expert is
bezaaid met steentjes.
Deze steentjes kunnen
struikelblokken, kasseien,
en soms echte pareltjes zijn.
(oude Chinese wijsheid)

Het onderzoek beschreven in dit proefschrift is zelden of nooit “in isolatie” uitgevoerd. Ontmoetingen met andere onderzoekers zorgden ervoor dat we met allerlei andere onderzoeksgebieden in aanraking kwamen. Het verheugde ons dat er niet zelden tastbare vruchten voor het grijpen lagen op de raakvlakken. In dit laatste hoofdstuk geven we hier een staal van.

8.1 Inleiding

In de literatuur worden vaagwijzigers zeer dikwijls geassocieerd met linguïstische wijzigers. Het is inderdaad ook in dit kader dat de definitie van L -vaagwijziger opgedoken is in Hoofdstuk 3 van dit proefschrift. Het is echter ook mogelijk om L -vaagwijzigers los te rukken uit deze context en hen te gaan beschouwen als technische hulpmiddelen die inwerken op L -vaagverzamelingen, daarbij een L -vaagverzameling in een andere omzettend. In het linguïstische kader hebben we reeds ondervonden dat het niet ongewoon is dat L -vaagwijzigers in “duale” paren opduiken (zie b.v. Eigenschap 4.13 (P10), 7.28, 7.30 en 7.37). Het ging

hier vaak om een beperkende en een uitbreidende wijziger (respectievelijk gebruikt voor b.v. de modellering van **zeer** en **tamelijk**). In dit hoofdstuk tonen we hoe dergelijke koppels van relationele vaagwijzigers ook kunnen gezien worden als openings- en sluitingsoperatoren, als operatoren die topologieën induceren, als vaagmorfologische operatoren en tenslotte als operatoren die boven- en ondervaagruwbenaderingen voortbrengen.

8.2 Openings- en sluitingsoperatoren

De begrippen “opening” (of “inwendige”) en “sluiting” duiken regelmatig op in wiskunde. Openings- en sluitingsoperatoren in een complete tralie $(X, \leq)$ zouden we algemeen kunnen omschrijven als $X - X$ afbeeldingen, gekenmerkt door een scherpe eigenschap P in X . Met een scherpe eigenschap P in X bedoelen we hier een deelverzameling P van X zodat voor alle x in X geldt dat $x \in P$ als x voldoet aan de eigenschap, en $x \notin P$ anders. Een P -openingsoperator in X is dan een $X - X$ afbeelding die elk element van X afbeeldt op het grootste element van X dat voldoet aan P en niet groter is dan x . Dit grootste element wordt de P -opening van x genoemd (of het P -inwendige van x). Analoog is een P -sluitingsoperator in X een $X - X$ afbeelding die elk element van X afbeeldt op het kleinste element van X dat voldoet aan P en niet kleiner is dan x . Dit kleinste element wordt de P -sluiting van x genoemd. Men kan hier nu ook noties van “open zijn” en “gesloten zijn” mee associëren, b.v. door te stellen dat een element P -open is als het gelijk is aan zijn P -opening, en dat het P -gesloten is als het gelijk is aan zijn P -sluiting. (Ter vergelijking: als een deur zich, na het sluiten ervan, nog in juist dezelfde toestand bevindt als ervoor, wil dat zeggen dat ze al gesloten was.)

Als L een complete tralie van lidmaatschapsgraden is, dan is $(\mathcal{F}_L(X), \subseteq)$ een complete tralie van L -vaagverzamelingen. Uit Eigenschap 7.33 weten we dat de L -vaagwijzigers $R\downarrow$ en $R\uparrow$ een element A van $\mathcal{F}_L(X)$ omzetten in respectievelijk een kleinere of een grotere L -vaagverzameling, tenminste als R reflexief is. In deze sectie maken we duidelijk hoe deze L -vaagwijzigers kunnen opgevat worden als openings- en sluitingsoperatoren, gekenmerkt door een eigenschap die, zoals men kan verwachten, iets met R te maken heeft. We laten in eerste instantie nog wat in het midden hoe die eigenschap P er werkelijk uit ziet, maar precies omdat er zo’n groot vermoeden is dat ze in verband staat met R , zullen we het wel meteen hebben over R -gesloten i.p.v. over P -gesloten.

Een vaak opgelegde eis aan openings- en sluitingsoperatoren is dat ze idempotent zijn. (Ter vergelijking: als je een deur sluit en ze vervolgens nog eens sluit, heeft die tweede actie geen bijkomend effect meer.) Uit Gevolg 7.36 weten we dat $R\downarrow$ en $R\uparrow$ inderdaad idempotent zijn op (voldoende) voorwaarde dat R een L -vage preorde is, dat de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, dat de tweede partiële afbeeldingen van $\mathcal{I}$ infmorfismen zijn en dat $\mathcal{I}$ voldoet aan het zwakke aftakkingsprincipe. Dit komt op het eerste zicht over als een hele waslijst van vereisten. We weten echter dat als de partiële afbeeldingen van $\mathcal{T}$ supmorfismen zijn, zijn residuele implicator $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ dan voldoet aan de voorwaar-

den opgelegd aan de implicator. We zullen in deze sectie dan ook steeds werken met dergelijke triangulaire normen en hun residuele implicatoren. Wanneer R bovendien symmetrisch is, dan is ook aan de voorwaarden van Eigenschap 7.37 voldaan; we zullen dankbaar gebruik maken van deze eigenschap (meer bepaald van haar Gevolg 7.38).

8.1. Definitie. Zij L een complete tralie en $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn. Zij verder R een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie in X . Voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$ zegt men

$$A \text{ is } R\text{-gesloten a.s.a. } R\uparrow A = A$$

Een L -vaagverzameling is m.a.w. R -gesloten als het nemen van het direct beeld onder R geen effect heeft. Uit de volgende eigenschap blijkt dat in dat geval het nemen van het superdirect beeld ook geen effect heeft.

8.2. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator. Zij verder R een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie in X en A in $\mathcal{F}_L(X)$, dan geldt

$$A \text{ is } R\text{-gesloten a.s.a. } R\downarrow A = A$$

Bewijs. Veronderstellen we eerst dat A R -gesloten is, dan is $R\uparrow A = A$, en dus ook $R\downarrow(R\uparrow A) = R\downarrow A$. Wegens Gevolg 7.38 is dus $R\uparrow A = R\downarrow A$ waaruit het gestelde volgt wegens de onderstelling dat A R -gesloten is. Anderzijds als we veronderstellen dat $R\downarrow A = A$, dan geldt dus ook $R\uparrow(R\downarrow A) = R\uparrow A$. Wegens Gevolg 7.38 is dan $R\downarrow A = R\uparrow A$ waaruit het gestelde volgt wegens de onderstelling dat $R\downarrow A = A$. $\square$

Uit bovenstaande eigenschap blijkt dat het begrip R -open, in analogie met Definitie 8.1 gedefinieerd als

$$A \text{ is } R\text{-open a.s.a. } R\downarrow A = A$$

samenvalt met het begrip R -gesloten. We merken terloops op dat de operatoren $R\uparrow$. en $R\downarrow$. niet noodzakelijk idempotent zijn als R niet transitief is, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

8.3. Voorbeeld. Zij $X = [0, 1]$ en A de vaagverzameling in X gedefinieerd als $A(x) = x$, voor alle x in X . Zij R de reflexieve en symmetrische vaagrelatie in X gedefinieerd als

$$R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x - y| < 0.1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

voor alle x en y in X . Men gaat na dat voor y in X :

$$\begin{aligned} R\downarrow A(y) &= \inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(z, y), A(z)) \\ &= \inf\{z \mid z \in X \wedge z \in]y - 0.1, y + 0.1[\} \\ &= \max(0, y - 0.1) \end{aligned}$$

Dus $R\downarrow A(1) = 0.9$. Bovendien

$$\begin{aligned} R\downarrow(R\downarrow A)(1) &= \inf_{z \in X} \mathcal{I}(R(z, 1), \max(0, z - 0.1)) \\ &= \inf \{ \max(0, z - 0.1) \mid z \in]0.9, 1] \} = 0.8 \end{aligned}$$

Analoog

$$\begin{aligned} R\uparrow A(y) &= \sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), R(z, y)) \\ &= \max \{ z \mid z \in X \wedge z \in]y - 0.1, y + 0.1[\} \\ &= \min(1, y + 0.1) \end{aligned}$$

waaruit $R\uparrow A(0) = 0.1$. Bovendien

$$\begin{aligned} R\uparrow(R\uparrow A)(0) &= \sup_{z \in X} \mathcal{T}(\min(1, z + 0.1), R(z, 0)) \\ &= \sup \{ \min(1, z + 0.1) \mid z \in [0, 0.1] \} = 0.2 \end{aligned}$$

Anderzijds als de vaagrelatie R niet symmetrisch is, zijn de gelijkheden uit 7.38 niet gegarandeerd, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

8.4. Voorbeeld. Zij de vaagrelatie R in $[0, 10]$ gedefinieerd als

$$R(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \leq y \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

voor alle x en y in $[0, 10]$. R is m.a.w. de scherpe relatie “is kleiner dan” en is dus een vage $\mathcal{T}$ -preorde voor om het even welke t-norm. Zij bovendien de vaagverzameling $A = \text{LIN}(\cdot; 5, 7, 9)$. Voor elke t-norm $\mathcal{T}$ en zijn residuele implicator $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ geldt dan, voor alle y in X ,

$$R\uparrow A(y) = \sup_{x \leq y} A(x) = A(y) \quad \text{en} \quad R\downarrow A(y) = \inf_{x \leq y} A(x) = 0$$

waaruit blijkt

$$R\downarrow(R\uparrow A) = \emptyset \neq R\uparrow A$$

In een volgende eigenschap lichten we toe welke eigenschap P de sluitings- en openingsoperatoren $R\uparrow$. en $R\downarrow$. kenmerkt. Informeel kunnen we deze eigenschap omschrijven als volgt: als x in A zit, dan zitten ook alle elementen y die gerelateerd zijn aan x in A .

8.5. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator. Zij verder R een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie in X en A in $\mathcal{F}_L(X)$, dan geldt

$$A \text{ is } R\text{-gesloten a.s.a. } (\forall (x, y) \in X^2) (\mathcal{T}(A(x), R(x, y)) \leq A(y))$$

Bewijs. Veronderstel eerst dat A R -gesloten is. Voor alle x en y in X geldt dan

$$\mathcal{T}(A(x), R(x, y)) \leq \sup_{z \in X} \mathcal{T}(A(z), R(z, y)) = A(y)$$

waaruit het gestelde. Anderzijds als $\mathcal{T}(A(x), R(x, y)) \leq A(y)$ voor alle x en y in X , dan is $R\uparrow A \subseteq A$. Uit de reflexiviteit van R volgt bovendien $A \subseteq R\uparrow A$. Uit deze twee inclusies samen volgt het gestelde. $\square$

Uit de volgende eigenschap blijkt dat $R\uparrow A$ en $R\downarrow A$ respectievelijk de R -sluiting en de R -opening zijn van een willekeurige L -vaagverzameling A in X .

8.6. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator. Zij verder R een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie in X en A in $\mathcal{F}_L(X)$, dan geldt

- (1) $R\uparrow A$ is de kleinste R -gesloten L -vaagverzameling in X die A omvat.
- (2) $R\downarrow A$ is de grootste R -gesloten L -vaagverzameling in X die bevat is in A .

Bewijs. Uit Gevolg 7.36 weten we dat $R\uparrow(R\uparrow A) = R\uparrow A$, terwijl Gevolg 7.38 ons leert dat $R\uparrow(R\downarrow A) = R\downarrow A$. $R\uparrow A$ en $R\downarrow A$ zijn dus R -gesloten. Uit Eigenschap 7.33 volgt bovendien

$$R\downarrow A \subseteq A \subseteq R\uparrow A$$

m.a.w. $R\downarrow A$ is omvat in A terwijl $R\uparrow A$ A omvat. We moeten nu nog aantonen dat het respectievelijk om de grootste en de kleinste gaat. Beschouw daarvoor een willekeurige R -gesloten L -vaagverzameling B zo dat $B \subseteq A$, dan volgt uit Eigenschap 7.7 dat $R\downarrow B \subseteq R\downarrow A$, en dus wegens Eigenschap 8.2 en de onderstelling dat B R -gesloten is, dat $B \subseteq R\downarrow A$. Analoo, als $A \subseteq B$ dan hebben we meteen wegens Eigenschap 7.7 dat $R\uparrow A \subseteq R\uparrow B$ waaruit wegens het R -gesloten zijn van B volgt $R\uparrow A \subseteq B$. $\square$

8.7. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator. Zij verder R en Q L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties in X . Als $Q \subseteq R$, dan is elke R -gesloten L -vaagverzameling in X ook Q -gesloten.

Bewijs. Stel A in $\mathcal{F}_L(X)$. Als A R -gesloten is, dan geldt bij definitie $R\uparrow A = A$ en dus wegens de onderstelling en Eigenschap 7.7 dat $Q\uparrow A \subseteq A$. Wegens de reflexiviteit van Q weten we ook $A \subseteq Q\uparrow A$ (zie Eigenschap 7.33), zodat het gestelde volgt. $\square$

Eigenschap 7.35 en haar Gevolg 7.36 beschrijven wat er o.a. kan gebeuren wanneer men tweemaal na elkaar het direct of het superdirect beeld neemt onder een bijzondere L -vaagrelatie R . In een volgende eigenschap bestuderen we eveneens het tweemaal na elkaar nemen van dezelfde soort van beeld, maar nu achtereenvolgens onder twee L -vaagrelaties R_1 en R_2 die niet noodzakelijk gelijk zijn. We formuleren een voldoende voorwaarde voor het omwisselen van de volgorde.

8.8. Eigenschap. Zij L een complete tralie, $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op L waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn, en $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator. Zij R_1 en R_2 L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties zo dat $R_1 \cup R_2$ $\mathcal{T}$ -transitief is, dan geldt voor alle A in $\mathcal{F}_L(X)$:

$$(R_1 \cup R_2) \uparrow A = R_1 \uparrow (R_2 \uparrow A) = R_2 \uparrow (R_1 \uparrow A) = (R_1 \uparrow A) \cup (R_2 \uparrow A)$$

$$(R_1 \cup R_2) \downarrow A = R_1 \downarrow (R_2 \downarrow A) = R_2 \downarrow (R_1 \downarrow A) = (R_1 \downarrow A) \cap (R_2 \downarrow A)$$

Bewijs. Zij A in $\mathcal{F}_L(X)$. Merk eerst op dat uit de veronderstelling dat $R_1 \cup R_2$ $\mathcal{T}$ -transitief is wegens de reflexiviteit en de symmetrie van R_1 en R_2 volgt dat $R_1 \cup R_2$ een L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie is. Uit Eigenschap 8.6 weten we dan dat $(R_1 \cup R_2) \uparrow A$ $R_1 \cup R_2$ -gesloten is. Aangezien $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$ is $(R_1 \cup R_2) \uparrow A$ wegens Eigenschap 8.7 ook R_1 -gesloten en dus

$$R_1 \uparrow ((R_1 \cup R_2) \uparrow A) = (R_1 \cup R_2) \uparrow A$$

Wegens $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$ en de monotoniceitseigenschappen van het direct beeld (zie Eigenschap 7.7) geldt dan

$$R_1 \uparrow (R_2 \uparrow A) \subseteq (R_1 \cup R_2) \uparrow A \quad (8.1)$$

Anderzijds weten we uit Eigenschap 7.7 en 7.33 dat $R_1 \uparrow A \subseteq R_1 \uparrow (R_2 \uparrow A)$ en $R_2 \uparrow A \subseteq R_1 \uparrow (R_2 \uparrow A)$ waaruit

$$R_1 \uparrow A \cup R_2 \uparrow A \subseteq R_1 \uparrow (R_2 \uparrow A)$$

Aangezien $(R_1 \cup R_2) \uparrow A = (R_1 \uparrow A) \cup (R_2 \uparrow A)$ wegens Eigenschap 7.25, geldt dus ook

$$(R_1 \cup R_2) \uparrow A \subseteq R_1 \uparrow (R_2 \uparrow A) \quad (8.2)$$

Uit (8.1) en (8.2) volgt dus

$$(R_1 \cup R_2) \uparrow A = R_1 \uparrow (R_2 \uparrow A)$$

De gelijkheid

$$(R_1 \cup R_2) \uparrow A = R_2 \uparrow (R_1 \uparrow A)$$

volgt hier onmiddellijk uit wegens de commutativiteit van de unie. De tweede lijn van gelijkheden kan vrij analoog aangetoond worden. Uit Eigenschap 8.6 en 8.7 weten we ook nu weer dat $(R_1 \cup R_2) \downarrow A$ R_1 -gesloten. Wegens Eigenschap 8.2

$$R_1 \downarrow ((R_1 \cup R_2) \downarrow A) = (R_1 \cup R_2) \downarrow A$$

Wegens $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$ en de monotoniceitseigenschappen van het superdirect beeld (zie Eigenschap 7.7) geldt dan

$$R_1 \downarrow (R_2 \downarrow A) \supseteq (R_1 \cup R_2) \downarrow A \quad (8.3)$$

Anderzijds weten we uit Eigenschap 7.7 en 7.33 dat $R_1 \downarrow A \supseteq R_1 \downarrow (R_2 \downarrow A)$ en $R_2 \downarrow A \supseteq R_1 \downarrow (R_2 \downarrow A)$ waaruit

$$R_1 \uparrow A \cap R_2 \uparrow A \supseteq R_1 \uparrow (R_2 \uparrow A)$$

Aangezien $(R_1 \cup R_2) \downarrow A = (R_1 \downarrow A) \cap (R_2 \downarrow A)$ wegens Eigenschap 7.25, geldt dus ook

$$R_1 \downarrow A \cap R_2 \downarrow A \supseteq R_1 \uparrow (R_2 \uparrow A) \quad (8.4)$$

Uit (8.3) en (8.4) volgt dus

$$(R_1 \cup R_2) \downarrow A = R_1 \downarrow (R_2 \downarrow A)$$

De gelijkheid

$$(R_1 \cup R_2) \downarrow A = R_2 \downarrow (R_1 \downarrow A)$$

volgt hier onmiddellijk uit wegens de commutativiteit van de unie. $\square$

8.3 Vaagtopologie

Louter theoretisch is een wiskundige topologie op een universum X een klasse van deelverzamelingen van X die “open verzamelingen” worden genoemd. De enige vereisten zijn dat zowel de lege verzameling als X zelf open verzamelingen zijn, dat een willekeurige unie van open verzamelingen open is en dat de doorsnede van twee open verzamelingen open is. Er zijn verschillende manieren om dit concept uit te breiden tot vaagtopologie. Eén ervan gaat als volgt [14]:

8.9. Definitie (Vaagtopologie). Een deelverzameling τ van $\mathcal{F}(X)$ wordt een vaagtopologie op X genoemd a.s.a.

(FT.1) $\emptyset \in \tau \wedge X \in \tau$

(FT.2) Uit $O_1 \in \tau \wedge O_2 \in \tau$ volgt $O_1 \cap O_2 \in \tau$

(FT.3) Uit $(\forall i \in I)(O_i \in \tau)$ volgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$

De klasse τ' is gedefinieerd als

$$F \in \tau' \text{ a.s.a. } co F \in \tau$$

Elk element van τ wordt een open vaagverzameling genoemd; elk element van τ' wordt een gesloten vaagverzameling genoemd.

Om verwarring met Sectie 8.2 te vermijden, zullen we de elementen van τ en τ' respectievelijk τ -open en τ -gesloten noemen. Een vaagverzameling is dus τ -gesloten indien haar complement τ -open is. Wegens de definitie is elke unie van τ -open vaagverzamelingen τ -open. Anderzijds kan men eenvoudig nagaan dat elke doorsnede van τ -gesloten vaagverzamelingen τ -gesloten is. Inderdaad, stel voor alle i in I dat $O_i \in \tau'$, m.a.w. dat $co O_i \in \tau$. Dan geldt

$$\bigcup_{i \in I} co O_i \in \tau$$

Hieruit volgt wegens de veralgemeende wetten van De Morgan

$$co(\bigcap_{i \in I} O_i) \in \tau$$

waaruit blijkt dat de doorsnede inderdaad τ -gesloten is. Dit maakt de volgende definitie zinvol:

8.10. Definitie (Inwendige, sluiting). Stel τ een vaagtopologie op X , en A een vaagverzameling in X . Het τ -inwendige en de τ -sluiting van A zijn de vaagverzamelingen $int(A)$ en $cl(A)$ in X gedefinieerd als

$$int(A) = \cup \{O \mid O \in \tau \wedge O \subseteq A\}$$

$$cl(A) = \cap \{F \mid F \in \tau' \wedge A \subseteq F\}$$

I.e. $int(A)$ is de grootste τ -open vaagverzameling bevat in A , terwijl $cl(A)$ de kleinste τ -gesloten vaagverzameling is die A bevat. int en cl worden respectievelijk de inwendige-operator en de sluitingsoperator van τ genoemd.

Men kan nagaan dat ze voldoen aan de volgende eigenschappen voor alle A en B in $\mathcal{F}(X)$ [56]:

- | | |
|--|--|
| (1) $int(X) = X$ | (1') $cl(\emptyset) = \emptyset$ |
| (2) $int(A) \subseteq A$ | (2') $A \subseteq cl(A)$ |
| (3) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$ | (3') $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$ |
| (4) $int(int(A)) = int(A)$ | (4') $cl(cl(A)) = cl(A)$ |

Zoals blijkt uit de volgende stelling geldt dit ook in zekere zin in de andere richting.

8.11. Stelling. [56] Stel f een vaagwijziger in X .

Deel I Als voor alle A en B in $\mathcal{F}(X)$ geldt dat

- (C1) $f(X) = X$
- (C2) $f(A) \subseteq A$
- (C3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

dan is $\tau = \{O \mid O \in \mathcal{F}(X) \wedge f(O) = O\}$ een vaagtopologie op X . Als bovendien geldt dat

- (C4) $f(f(A)) = f(A)$

voor alle A in $\mathcal{F}(X)$, dan is f de inwendige-operator van τ .

Deel II Als voor alle A en B in $\mathcal{F}(X)$ geldt dat

- (C1') $f(\emptyset) = \emptyset$
- (C2') $A \subseteq f(A)$
- (C3') $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

dan is $\tau = \{O \mid O \in \mathcal{F}(X) \wedge f(\text{co } O) = \text{co } O\}$ een vaagtopologie op X . Als bovendien geldt dat

$$(C4') \quad f(f(A)) = f(A)$$

voor alle A in $\mathcal{F}(X)$, dan is f de sluitingsoperator van τ .

Uit de volgende stelling blijkt hoe het direct beeld en het superdirect beeld kunnen gezien worden als inwendige- en sluitingsoperator van een topologie die ze induceren op X .

8.12. Stelling. Zij $\mathcal{T}$ een t-norm op $[0, 1]$ waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn, en zij $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator. Zij verder R een reflexieve vaagrelatie in X , dan is

$$\tau_1 = \{O \mid O \in \mathcal{F}(X) \wedge R \downarrow O = O\}$$

een vaagtopologie op X . Als R bovendien $\mathcal{T}$ -transitief is, dan is $R \downarrow$ de inwendige-operator van τ_1 . Verder is voor elke reflexieve vaagrelatie R in X

$$\tau_2 = \{O \mid O \in \mathcal{F}(X) \wedge R \uparrow (\text{co } O) = \text{co } O\}$$

een vaagtopologie op X . Als R bovendien $\mathcal{T}$ -transitief is, dan is $R \uparrow$ de sluitingsoperator van τ_2 .

Bewijs. De voorwaarden uit Stelling 8.11 zijn inderdaad vervuld: (C1) en (C1') wegens Eigenschap 7.31, (C2) en (C2') wegens Eigenschap 7.33, (C3) wegens Eigenschap 7.12, (C3') wegens Eigenschap 7.22, en (C4) en (C4') wegens Gevolg 7.36. $\square$

Enige verduidelijking van het verband tussen bovenstaande stelling en de rol van $R \downarrow$ en $R \uparrow$ als openings- en sluitingsoperatoren zoals besproken in Sectie 8.2, is allicht op zijn plaats. We houden hierbij de notaties aan uit bovenstaande stelling, maar veronderstellen dat R een vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie is. We herinneren eraan dat we een vaagverzameling A dan R -gesloten genoemd hebben indien $R \uparrow A = A$. Analoog zouden we A R -open kunnen noemen indien $R \downarrow A = A$, maar zoals Eigenschap 8.2 uitwees, zijn R -gesloten en R -open volledig samenvallende begrippen. Men ziet eenvoudig in dat ook het concept τ_1 -open hiermee gelijkwaardig is. Er geldt dus ook

$$\tau_1 = \{O \mid O \in \mathcal{F}(X) \wedge R \uparrow O = O\}$$

Wat betreft de tweede geïnduceerde vaagtopologie uit Stelling 8.12 merken we op dat een vaagverzameling A τ_2 -open is indien haar complement R -gesloten is (of daarmee gelijkwaardig: indien haar complement R -open is). Er geldt dus ook

$$\tau_2 = \{O \mid O \in \mathcal{F}(X) \wedge R \downarrow (\text{co } O) = \text{co } O\}$$

Om nog een stapje verder te gaan: een vaagverzameling A is bij definitie τ_2 -gesloten indien haar complement τ_2 -open is. Gelet op de involutiviteit van $\mathcal{N}_s$

is A dus τ_2 -gesloten indien A zelf R -gesloten is (of ermee gelijkwaardig: indien A R -open is). Samenvattend kunnen we dus stellen dat τ_1 -open, R -open, R -gesloten en τ_2 -gesloten volledig samenvallende begrippen zijn. Anderzijds zijn ook τ_1 -gesloten en τ_2 -open samenvallende begrippen.

In een volgende stelling zullen we op een alternatieve manier aantonen dat τ_1 een vaagtopologie op X is. We eisen hierbij wel dat R een vage $\mathcal{T}$ -quivalentierelatie is, teneinde de resultaten uit Sectie 8.2 te kunnen aanwenden. Bovendien introduceren we een variant van τ_2 door i.p.v. de standaardnegator, de door $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ geïnduceerde negator te gebruiken. De resulterende klasse vaagverzamelingen τ_3 is opnieuw een vaagtopologie op X , en bovendien kunnen we haar duidelijk situeren t.o.v. τ_1 .

8.13. Stelling. Zij $\mathcal{T}$ een t-norm op $[0, 1]$ waarvan de partiële afbeeldingen sup-morfismen zijn, zij $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ zijn residuele implicator en $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ de geïnduceerde negator. Zij verder R een vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie in X , dan zijn

$$\tau_1 = \{O \mid O \in \mathcal{F}(X) \wedge R \downarrow O = O\}$$

$$\tau_3 = \{O \mid O \in \mathcal{F}(X) \wedge R \uparrow (co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} O) = co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} O\}$$

vaagtopologieën op X . $R \downarrow$ is de inwendige-operator van τ_1 . Indien $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ involutief is, dan is $R \uparrow$ de sluitingsoperator van τ_3 .

Bewijs. Uit Eigenschap 7.31 weten we dat $R \downarrow X = X$, m.a.w. $X \in \tau_1$, maar ook dat de reflexiviteit van R een voldoende voorwaarde is voor $R \downarrow \emptyset = \emptyset$, m.a.w. $\emptyset \in \tau_1$. Indien bovendien $O_1 \in \tau_1$ en $O_2 \in \tau_1$, dan geldt wegens Eigenschap 7.12

$$R \downarrow (O_1 \cap O_2) = (R \downarrow O_1) \cap (R \downarrow O_2) = O_1 \cap O_2$$

waaruit blijkt dat ook $O_1 \cap O_2 \in \tau_1$. Stel tenslotte dat $O_i \in \tau_1$, voor alle i in I , dan geldt dus $R \downarrow O_i = O_i$, voor alle i in I , wat wegens Eigenschap 8.2 zoveel wil zeggen als $R \uparrow O_i = O_i$, voor alle i in I . We steunen daarbij op het feit dat R een vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie is. Wegens Opmerking 7.23 geldt dan verder

$$R \uparrow \bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} R \uparrow O_i = \bigcup_{i \in I} O_i$$

waaruit, gelet op Eigenschap 8.2 volgt dat een willekeurige unie van elementen van τ_1 opnieuw behoort tot τ_1 . Om aan te tonen dat τ_3 eveneens een vaagtopologie is, merken we eerst op dat wegens Eigenschap 7.31

$$R \uparrow co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} X = R \uparrow \emptyset = \emptyset = co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} X$$

Gebruik makend van de reflexiviteit van R kunnen we analoog aantonen dat $R \uparrow co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} \emptyset = \emptyset$, m.a.w. $\emptyset$ en X behoren tot τ_3 . Indien bovendien $O_1 \in \tau_3$ en $O_2 \in \tau_3$, dan geldt

$$\begin{aligned} R \uparrow (co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} (O_1 \cap O_2)) &= R \uparrow (co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} O_1 \cup co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} O_2) \\ &= R \uparrow (co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} O_1) \cup R \uparrow (co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} O_2) \\ &= co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} O_1 \cup co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} O_2 \\ &= co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} (O_1 \cap O_2) \end{aligned}$$

waarbij we achtereenvolgens gebruik gemaakt hebben van Hulpstelling 2.18, van Eigenschap 7.22, van $O_1 \in \tau_3$ en $O_2 \in \tau_3$ en tenslotte opnieuw van Hulpstelling 2.18. Stel tenslotte dat $O_i \in \tau_3$, voor alle i in I , dan geldt dus $R\uparrow co_{\mathcal{N}_T} O_i = co_{\mathcal{N}_T} O_i$, voor alle i in I , wat wegens Eigenschap 8.2 zoveel wil zeggen als $R\downarrow co_{\mathcal{N}_T} O_i = co_{\mathcal{N}_T} O_i$, voor alle i in I . We steunen daarbij op het feit dat R een vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie is. Wegens Opmerking 7.23 geldt dan verder

$$\begin{aligned} R\downarrow co_{\mathcal{N}_T} \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) &= R\downarrow \left(\bigcap_{i \in I} co_{\mathcal{N}_T} O_i \right) \\ &= \bigcap_{i \in I} R\downarrow co_{\mathcal{N}_T} O_i \\ &= \bigcap_{i \in I} co_{\mathcal{N}_T} O_i \\ &= co_{\mathcal{N}_T} \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \end{aligned}$$

waarbij we achtereenvolgens gebruik gemaakt hebben van Hulpstelling 2.56, Opmerking 7.13, Eigenschap 8.2 en tenslotte opnieuw Hulpstelling 2.56. Gelet op Eigenschap 8.2 volgt hier nu uit dat een willekeurige unie van elementen van τ_3 opnieuw behoort tot τ_3 . Dat $R\downarrow$, de inwendige-operator van τ_1 is volgt onmiddellijk enerzijds uit het samenvallen van de begrippen τ_1 -open en R -gesloten, en anderzijds uit Eigenschap 8.6. Als $\mathcal{N}_T$ involutief is, dan vallen ook de begrippen τ_3 -gesloten en R -gesloten samen, zodat we ons ook in dit geval kunnen beroepen op Eigenschap 8.6 om aan te tonen dat $R\uparrow$, de sluitingsoperator van τ_3 is. $\square$

8.14. Eigenschap. Zij $\mathcal{T}$ een t-norm op $[0, 1]$ waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn, zij $\mathcal{I}_T$ zijn residuele implicator en $\mathcal{I}_N$ de geïnduceerde negator. Zij verder R een reflexieve vaagrelatie in X . Voor de verzamelingen τ_1 en τ_3 uit Stelling 8.13 geldt $\tau_1 \subseteq \tau_3$, en indien $\mathcal{N}_T$ involutief is, zelfs $\tau_1 = \tau_3$.

Bewijs. We bewijzen eerst dat τ_1 bevat is in τ_3 . Stel daarvoor $O \in \tau_1$, dan geldt $R\downarrow O = O$ en dus ook $co_{\mathcal{N}_T}(R\downarrow O) = co_{\mathcal{N}_T} O$. Wegens Eigenschap 7.28 volgt hieruit

$$R\uparrow(co_{\mathcal{N}_T} O) \subseteq co_{\mathcal{N}_T} O$$

terwijl wegens de reflexiviteit van R geldt (zie Eigenschap 7.33)

$$co_{\mathcal{N}_T} O \subseteq R\uparrow(co_{\mathcal{N}_T} O)$$

Wanneer we beide inclusies samenbrengen tot een gelijkheid, blijkt dat $O \in \tau_3$. Stel anderzijds dat gegeven is dat $O \in \tau_3$. Als $\mathcal{N}_T$ involutief is, dan volgt uit $R\uparrow co_{\mathcal{N}_T} O = co_{\mathcal{N}_T} O$ dat $co_{\mathcal{N}_T}(R\uparrow co_{\mathcal{N}_T} O) = O$. Wegens Eigenschap 7.28 volgt hieruit

$$O \subseteq R\downarrow O$$

terwijl wegens de reflexiviteit van R geldt (zie Eigenschap 7.33)

$$R\downarrow O \subseteq O$$

Combineren van beide inclusies maakt duidelijk dat $O \in \tau_1$. $\square$

Indien $\mathcal{N}_T$ niet involutief is, dan zijn τ_1 en τ_3 niet noodzakelijk gelijk. Bovendien is dan niet gegarandeerd dat $R\uparrow$. de sluitingsoperator van τ_3 is. Dit alles blijkt uit volgend voorbeeld.

8.15. Voorbeeld. Zij $X = \{x_0, x_1\}$. Men gaat gemakkelijk na dat de vaagrelatie R gedefinieerd als $R(x, y) = 1$, voor alle x en y in X , een vage T -equivalentierelatie is voor om het even welke t -norm op $[0, 1]$. Zij de vaagverzameling O in X gedefinieerd als $A = \{(x_0, 0.5), (x_1, 0.7)\}$. Voor het nemen van het direct beeld gebruiken we $\mathcal{T}_M$, voor het superdirect beeld zijn residuele implicator $\mathcal{I}_M$. Gebruik makend van de geïnduceerde negator voor het complement, gaat men eenvoudig na dat $co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}_M}} A = \emptyset$. Hieruit volgt dan met Eigenschap 7.31 dat $R\uparrow co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}_M}} A = co_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}_M}} A$. Anderzijds geldt voor alle y in X

$$R\downarrow A(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}_M(1, A(x)) = 0.5$$

m.a.w. $R\downarrow A \neq A$. Gelet op Stelling 8.14 besluiten we daaruit

$$\tau_1 \subset \tau_3$$

Bij definitie beeldt de sluitingsoperator f van τ_3 de vaagverzameling A af op de kleinste vaagverzameling B zo dat $B \in \tau_3$ en $A \subseteq B$. Uit het bovenstaande weten we reeds dat $A \in \tau_3$, waaruit men gemakkelijk afleidt dat $f(A) = A$. Anderzijds kan men nagaan dat voor alle y in X geldt dat

$$R\uparrow A(y) = \sup_{x \in X} A(x) = 0.7$$

waaruit blijkt dat $A \subset R\uparrow A$. We besluiten hieruit dat $R\uparrow$. in dit voorbeeld niet de sluitingsoperator van τ_3 is.

8.4 Vaagmorfologie

Zoals de naam aangeeft is wiskundige morfologie [91] een theorie voor de analyse van de vorm van objecten m.b.v. wiskundige operatoren. Deze theorie kent een belangrijke toepassing in beeldverwerking, enerzijds voor binaire beelden en anderzijds voor grijswaardbeelden. De afgelopen jaren werd vaagmorfologie geïntroduceerd als een uitbreiding van binaire morfologie naar grijswaardemorfologie ([19],[74],[75]). Een beeld wordt daarbij voorgesteld als een vaagverzameling in het universum $\mathbb{R}^n$ van de pixels (picture elements), meestal met $n = 2$. De lidmaatschapsgraden worden opgevat als grijswaarden. De lettergreep “vaag” in “vaagmorfologie” wijst dan ook veeleer op het feit dat deze tak van de morfologie gretig gebruik maakt van technische hulpmiddelen uit de vaagverzamelingenleer, eerder dan te willen aangeven dat deze discipline zich bezig houdt met de representatie van vage (linguïstische) informatie.

Technieken uit de beeldverwerking zijn er o.m. op gericht om beelden scherp te stellen, om ruis te verwijderen uit beelden en om randen van objecten in de beelden te ontdekken. In de (vaag)morfologie zijn er daartoe een aantal basisbewerkingen ter beschikking, zoals dilatatie en erosie, die de grijswaarden van een

origineel beeld veranderen. Informeel gezegd tasten zij het beeld a.h.w. pixel per pixel af door een venstertje van enkele pixels groot over het beeld te verschuiven. Om de nieuwe grijswaarde van een pixel te bepalen wordt er een soort van onderhandeling doorgevoerd met de grijswaarden van de naburige pixels. Ook dit venstertje, in het jargon spreekt men over “structurelement”, is een vaagverzameling in $\mathbb{R}^n$.

8.16. Definitie (Dilatatie en erosie). Zij $\mathcal{T}$ een triangulaire norm en $\mathcal{I}$ een implicator op $[0, 1]$. Zij verder A en S vaagverzamelingen in $\mathbb{R}^n$. De dilatatie $D(A, S)$ en de erosie $E(A, S)$ met structurelement S van een grijswaardebeeld A zijn de vaagverzamelingen in $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd als

$$D(A, S)(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{T}(S(x - y), A(x))$$

$$E(A, S)(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}(S(x - y), A(x))$$

voor alle y in $\mathbb{R}^n$.

Stel dat de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) - \mathbb{R}^n$ afbeelding V de verschilfunctie in $\mathbb{R}^n$ is, m.a.w. $V(x, y) = x - y$, voor alle x en y in $\mathbb{R}^n$. Men ziet dan eenvoudig in dat de dilatatie en de erosie met structurelement S van een grijswaardebeeld A gegeven worden door

$$D(A, S) = (S \circ V) \uparrow A \text{ en } E(A, S) = (S \circ V) \downarrow A$$

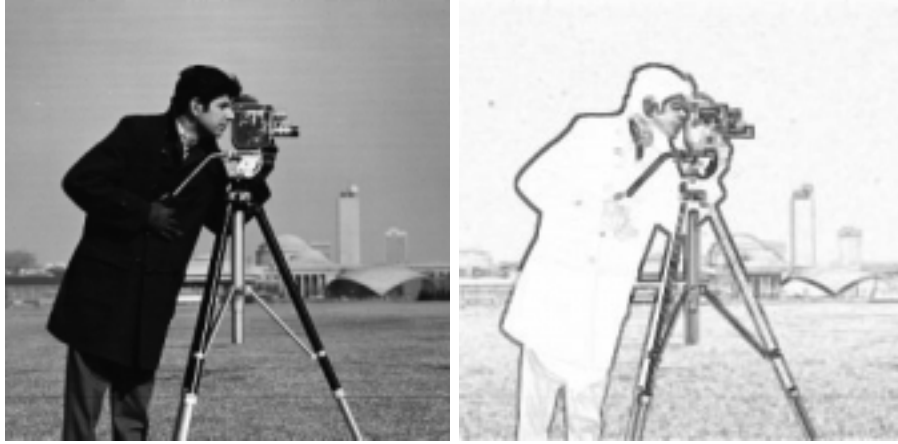
In veel toepassingen is het gebruikelijk dat $S(0) = 1$, d.w.z. dat de oorsprong 0 van $\mathbb{R}^n$ volledig behoort tot het structurelement. Men gaat eenvoudig na dat $S \circ V$ dan reflexief is. Wegens Eigenschap 7.33 geldt dan voor elk beeld A in $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

$$E(A, S) \subseteq A \subseteq D(A, S)$$

Wanneer een hogere grijswaarde, d.w.z. een hogere lidmaatschapsgraad, correspondeert met een donkere kleur, dan is de dilatatie van een beeld A donkerder (of om helemaal correct te zijn “niet lichter”) dan het origineel, terwijl de erosie het beeld juist lichter maakt (of “niet donkerder”). Voor randdetectie in een beeld A gebruikt men dan het vaagverzamelingtheoretisch verschil van $D(A, S)$ en $E(A, S)$, b.v. gedefinieerd als $D(A, S) \cap co(E(A, S))$. Figuur 8.1 toont enerzijds een beeld A , en anderzijds

$$(S \circ V) \uparrow A \cap co((S \circ V) \downarrow A)$$

waarbij werd gebruik gemaakt van $\mathcal{T}_M$ voor het nemen van het direct beeld (dilatatie), en van de Kleene-Dienes implicator $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_M, \mathcal{N}_s}$ voor het superdirect beeld (erosie). Sommige van de andere eigenschappen uit Hoofdstuk 7 hebben ook een bijzondere betekenis voor vaagmorfologische operatoren. Uit Eigenschap 7.22 volgt b.v. dat de dilatatie van een beeld A kan bekomen worden door A te verdelen in deelverzamelingen A_i ($i = 1, \dots, n$), door (parallel) de dilataties $D(A_i, S)$ ($i = 1, \dots, n$) te berekenen, en de verkregen resultaten samen te voegen, wat uiteraard een handige manier van werken kan zijn om de rekentijd te verlagen.



Figuur 8.1: Randdetectie (afbeeldingen uit [60])

8.5 Vaagruwverzamelingenleer

Ruwverzamelingenleer (rough set theory) werd in de jaren '80 door Pawlak geïntroduceerd voor het construeren van benaderingen van concepten wanneer slechts onvolledige informatie ter beschikking is [83]. De beschikbare informatie bestaat uit een verzameling A van voorbeelden van een concept C , en een scherpe relatie R in het universum X waarvan A een deelverzameling is. R modelleert “ononderscheidbaarheid” (“indiscernibility” of “indistinguishability”) en is dus normaal gezien een tolerantierelatie (een reflexieve en symmetrische relatie), en meestal zelfs een equivalentierelatie. Het koppel (X, R) wordt een benaderingsruimte genoemd. De ruwverzamelinganalyse doet uitspraken over het al dan niet behoren van een of ander element x uit X tot het concept C waarvan A een verzameling van voorbeelden is, op basis van zijn gelijkenis met de elementen uit A . Om tot dergelijke uitspraken te komen wordt A op twee manieren afgeschat.

8.17. Definitie (Onder- en bovenbenadering). Zij (X, R) een benaderingsruimte en A een deelverzameling van X . De onder- en de bovenbenadering van A in (X, R) zijn dan respectievelijk de volgende deelverzamelingen van X :

$$\underline{R}A = \{y | y \in X \wedge Ry \subseteq A\}$$

$$\overline{R}A = \{y | y \in X \wedge Ry \cap A \neq \emptyset\}$$

De aandachtige lezer herkent hierin onmiddellijk formules (7.3) en (7.2) van superdirect en direct beeld van A onder R . De achterliggende betekenis is dat $\overline{R}A$ de verzameling van elementen is die *mogelijk* tot het concept C behoren, terwijl $\underline{R}A$ de verzameling van elementen is die *noodzakelijk* tot C behoren. y

behoort immers tot $\underline{R}A$ indien alle elementen uit X die lijken op y ook tot A behoren (waardoor er geen twijfel is dat y ook tot A behoort), en y behoort tot $\overline{R}A$ zodra er een element van A is dat lijkt op y . Indien y behoort tot $\overline{R}A \setminus \underline{R}A$, dan rijst er twijfel omdat y dan zowel lijkt op minstens één element van A als op minstens één element van X dat niet in A zit.

In de literatuur is er geen eenduidigheid omtrent de definitie van het begrip “ruwverzameling”. Sommigen zeggen dat een verzameling A een “rough set” is indien $\underline{R}A \neq \overline{R}A$ (zie b.v. [65]). Anderen zien een ruwverzameling (A_1, A_2) als de klasse van verzamelingen die A_1 en A_2 respectievelijk als onder- en bovenbenadering hebben (zie b.v. [13]). Nog anderen noemen (A_1, A_2) een ruwverzameling zodra er een verzameling A bestaat zo dat $\underline{R}A = A_1$ en $\overline{R}A = A_2$ (zie b.v. [86]). We zullen in het vervolg de volgende definitie gebruiken:

8.18. Definitie (Ruwverzameling). Zij (X, R) een benaderingsruimte en A, A_1 en A_2 in $\mathcal{P}(X)$. Het koppel (A_1, A_2) wordt de ruwverzameling van A genoemd indien $A_1 = \underline{R}A$ en $A_2 = \overline{R}A$. Het koppel (A_1, A_2) wordt een ruwverzameling genoemd indien er een B in $\mathcal{P}(X)$ bestaat zo dat (A_1, A_2) de ruwverzameling van B is.

De B uit bovenstaande definitie is vaak niet uniek. De uitdrukking “de ruwverzameling (A_1, A_2) ” draagt dus meestal minder info in zich dan de uitdrukking “de ruwverzameling van A ”. Wanneer een verzameling A gegeven is, dan kan men op unieke wijze de onder- en de bovenbenadering van A bepalen en dus een ruwverzameling construeren. Wanneer echter een ruwverzameling (A_1, A_2) gegeven is, dan kan er enkel de volgende afchatting gemaakt worden van een verzameling A

$$A_1 = \underline{R}A \subseteq A \subseteq \overline{R}A = A_2 \quad (8.5)$$

(A_1, A_2) is m.a.w. de ruwverzameling van elke verzameling A die voldoet aan (8.5).

Sinds haar ontstaan kampt de ruwverzamelingenleer met andere disciplines in een gevecht om een eigen identiteit. Eerst en vooral merken we op dat elke ruwverzameling een wazigverzameling is in de zin van Gentilhomme [46]. We veronderstellen immers dat de relatie R reflexief is, waardoor geldt (zie Eigenschap 7.33)

$$\underline{R}A \subseteq \overline{R}A$$

Pawlak beweert in [83] dat ruwverzamelingen een veralgemening zijn van vaagverzamelingen: “*the concept of rough set is wider than the concept of fuzzy set*”. Zijn argumenten worden o.m. in [65] overgenomen. Anderzijds schrijft Biswas in [6] net het tegenovergestelde met de mooie metafoor: “*Rough sets are fuzzy sets, although the converse is not true in general. In fact, rough sets are very useful allotropes, of fuzzy sets, like diamonds, graphites are nice allotropes of carbons*”. De identiteitsverwarring begint wanneer men voor de ruwverzameling $(\underline{R}A, \overline{R}A)$ van A in een benaderingsruimte (X, R) een lidmaatschapsfunctie

opstelt (men spreekt over “rough membership function”). In [84] wordt voorgesteld met $(\underline{R}A, \overline{R}A)$ de lidmaatschapsfunctie $P_1(A)$ te associëren die gedefinieerd is als

$$P_1(A)(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \in \underline{R}A \\ \frac{1}{2}, & \text{als } x \in \overline{R}A \setminus \underline{R}A \\ 0, & \text{als } x \in X \setminus \overline{R}A \end{cases}$$

voor alle x in X . In [6] en [65] gebruikt men de lidmaatschapsfunctie $P_2(A)$ gedefinieerd als

$$P_2(A)(x) = \frac{|\underline{R}x \cap A|}{|\underline{R}x|}$$

voor alle x in X . $P_2(A)(x)$ is dus a.h.w. een maat voor de relatieve overlap van $\underline{R}x$ en A . We merken daarbij op dat de verzameling A van voorbeelden eindig is en dat, gelet op de reflexiviteit van R , $|\underline{R}x| \geq 1$. Men gaat eenvoudig na dat

$$\begin{aligned} P_2(A)(x) &= 1, & \text{als } x \in \underline{R}A \\ 0 < P_2(A)(x) &< 1, & \text{als } x \in \overline{R}A \setminus \underline{R}A \\ P_2(A)(x) &= 0, & \text{als } x \in X \setminus \overline{R}A \end{aligned}$$

De definitie van $P_1(A)$ steunt volledig op de kennis van de onder- en bovenbenadering van A . Men ziet eenvoudig in dat voor een verzameling B die dezelfde onder- en bovenbenaderingen als A heeft geldt dat $P_1(A) = P_1(B)$. Dat dit niet opgaat voor P_2 blijkt uit volgend voorbeeld.

8.19. Voorbeeld. Zij (X, R) een benaderingsruimte met $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ en $R(x, y) = 1$, voor alle x en y in X . Zij verder $A = \{x_1\}$ en $B = \{x_2, x_3\}$. Men gaat dan eenvoudig na dat

$$\begin{aligned} \underline{R}A &= \underline{R}B = \emptyset \\ \overline{R}A &= \overline{R}B = X \end{aligned}$$

terwijl

$$P_2(A)(x) = \frac{1}{3} \text{ en } P_2(B)(x) = \frac{2}{3}$$

voor alle x in X .

Om $P_2(A)$ te kunnen construeren is er dus duidelijk nog iets meer nodig dan enkel de kennis van $\underline{R}A$ en $\overline{R}A$. Het is uiteraard wel zo dat uit $(\underline{R}A, \overline{R}A) \neq (\underline{R}B, \overline{R}B)$ volgt dat $P_2(A) \neq P_2(B)$, en dat $P_1(A) \neq P_1(B)$. Twee verschillende ruwverzamelingen geven dus aanleiding tot twee verschillende vaagverzamelingen, onafhankelijk of we die construeren met P_1 of met P_2 .

Dat het mogelijk is om voor de ruwverzameling van een willekeurige verzameling A in een willekeurige benaderingsruimte (X, R) , een lidmaatschapsfunctie $P_2(A)$ in X op te stellen, doet Biswas besluiten dat ruwverzamelingen vaagverzamelingen zijn [6]. Het volgende voorbeeld toont aan dat het omgekeerde niet steeds mogelijk is.

8.20. Voorbeeld. [6] Zij (X, R) een benaderingsruimte waarbij

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

en R een equivalentierelatie is. Zij verder de vaagverzameling B in X gegeven door

$$B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0), (x_3, 0.5), (x_4, 1), (x_5, 0.6), (x_6, 0), (x_7, 1)\}$$

Indien er een A in $\mathcal{P}(X)$ zou bestaan zo dat $P_2(A) = B$ dan zou $\underline{R}A = \{x_4, x_7\}$ en $\overline{R}A = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_7\}$. Om

$$P_2(A)(x_5) = \frac{|Rx_5 \cap A|}{|Rx_5|} = 0.6 = \frac{3}{5}$$

te bekomen, moet, gelet op het feit dat X slechts 7 elementen bevat, $|Rx_5 \cap A| = 3$ en $|Rx_5| = 5$. Stel dat $x_2 \in Rx_5$, dan zou, wegens het feit dat R een equivalentierelatie is, $Rx_2 = Rx_5$ en dus $Rx_2 \cap A = Rx_5 \cap A = \emptyset$ wat strijdig is met $|Rx_5 \cap A| = 3$. x_2 kan dus niet tot Rx_5 behoren. Om dezelfde reden kan ook x_6 niet tot Rx_5 behoren. Stel dat x_4 tot Rx_5 zou behoren, dan zou $Rx_5 = Rx_4 \subseteq A$, waaruit zou volgen dat $|Rx_5 \cap A|/|Rx_5| = 1$, opnieuw een tegenstrijdigheid. Ook x_4 kan dus niet tot Rx_5 behoren. Hieruit kan men besluiten dat Rx_5 onmogelijk 5 elementen kan bevatten.

Er bestaat dus geen geschikte equivalentierelatie R zo dat uit de lidmaatschapsfunctie van B een ruwverzameling van een verzameling A in (X, R) kan geconstrueerd worden. Zoals uit volgend voorbeeld blijkt, kan er wel zo'n A gevonden worden in een benaderingsruimte waarin R een niet-transitieve tolerantierelatie is.

8.21. Voorbeeld. Zij X en B gedefinieerd zoals in Voorbeeld 8.20. Stel $A = \{x_4, x_5, x_7\}$ en zij de matrixvoorstelling van de relatie R gegeven door

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1	0	0	0	1	0	0
x_2	0	1	0	0	0	0	0
x_3	0	0	1	0	1	0	0
x_4	0	0	0	1	1	0	0
x_5	1	0	1	1	1	0	1
x_6	0	0	0	0	0	1	0
x_7	0	0	0	0	1	0	1

dan geldt $P_2(A) = B$.

Het is echter niet nodig om zijn toevlucht te nemen tot een universum van 7 elementen om te illustreren dat er een vaagverzameling B in een universum X bestaat waarvoor geen enkele benaderingsruimte (X, R) kan opgezet worden zo dat $P_2(A) = B$ voor een of andere verzameling A in X . Het volstaat eigenlijk al om op te merken dat de zoektocht vruchteloos zal zijn indien minstens één van de

lidmaatschapsgraden in B irrationaal is, en wel omwille van de definitie van P_2 . Maar ook indien alle lidmaatschapsgraden rationaal zijn, kan het misgaan, zelfs al leggen we aan de relatie R geen enkele eis op (qua reflexiviteit, symmetrie,...).

8.22. Voorbeeld. Zij $X = \{x_1, x_2\}$ en B de vaagverzameling in X gedefinieerd als $B(x) = \frac{1}{3}$. Voor elke relatie R in X en voor elke deelverzameling A van X geldt dan $P_2(A) \neq B$. Men ziet immers onmiddellijk dat

$$P_2(A)(x_1) = \frac{|Rx_1 \cap A|}{|Rx_1|}$$

nooit $\frac{1}{3}$ kan zijn, aangezien in een universum dat slechts twee elementen groot is, er nooit één op drie elementen van Rx_1 tot A kunnen behoren.

Het feit dat men niet steeds de stap kan zetten van een willekeurige vaagverzameling B naar een ruwverzameling van A zo dat $P_2(A) = B$ (zie Voorbeeld 8.20 en 8.22) doet Biswas besluiten dat een vaagverzameling niet in het algemeen een ruwverzameling is [6]. We merken daarbij op dat voor een vaagverzameling B met een lidmaatschapsfunctie van de vorm

$$B(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \in Q_1 \\ \frac{1}{2}, & \text{als } x \in Q_2 \\ 0, & \text{als } x \in Q_3 \end{cases}$$

voor alle x in $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$ wel steeds een ruwverzameling van een verzameling A kan geconstrueerd worden zo dat $P_1(A) = B$. Men kan immers de ruwverzameling $(Q_1, Q_1 \cup Q_2)$ construeren in een benaderingsruimte $(Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3, R)$ waarbij R een equivalentierelatie is met drie klassen, nl. Q_1 , Q_2 en Q_3 . $(Q_1, Q_1 \cup Q_2)$ is dan de ruwverzameling van een verzameling A die ontstaat uit de unie van Q_1 en een willekeurig element uit Q_2 . (Indien Q_2 leeg is, dan is $A = Q_1$.) Men ziet eenvoudig in dat voor dergelijke A inderdaad geldt $P_1(A) = B$. Meestal zal er geen unieke, maar zullen er meerdere kandidaten A zijn. Een zeer eenvoudige manier om met een *willekeurige* vaagverzameling B in X een ruwverzameling te associëren, is trouwens om te kiezen voor $(\ker B, \supp B)$ in de benaderingsruimte (X, R) waarbij R de gelijkheid is in X . Het argument van Biswas valt of staat dus met de keuze voor een of ander constructieproces voor de lidmaatschapsfunctie.

Om te motiveren waarom ruwverzamelingen een veralgemening zouden zijn van vaagverzamelingen wordt in [83] aangehaald dat

$$P_1(A \cup B) \supseteq P_1(A) \cup P_1(B)$$

maar dat de gelijkheid niet noodzakelijk geldt. Wegens Eigenschap 7.22 geldt immers enerzijds $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}A \cup \overline{R}B$ en anderzijds $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}A \cup \underline{R}B$. Het enige wat er dus zou kunnen veranderen wanneer we van $P_1(A) \cup P_1(B)$ overstappen op $P_1(A \cup B)$ is dat een aantal elementen x opgewaardeerd worden van $\frac{1}{2}$ naar 1. $P_1(A \cup B)$ is dus niet kleiner dan $P_1(A) \cup P_1(B)$. Dat de gelijkheid niet steeds geldt, blijkt uit volgend voorbeeld.

8.23. Voorbeeld. Zij (X, R) de benaderingsruimte met $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ en R de equivalentierelatie met matrixvoorstelling

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	0	0
x_3	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1

Zij $A = \{x_2, x_3\}$ en $B = \{x_1, x_4\}$ en dus $A \cup B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan geldt

$$\underline{R}A = \underline{R}B = \emptyset$$

$$\overline{R}A = \overline{R}B = X$$

$$\underline{R}(A \cup B) = \overline{R}(A \cup B) = X$$

en bovendien

$$P_1(A) = P_1(B) = P_2(A) = P_2(B) = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.5), (x_3, 0.5), (x_4, 0.5)\}$$

terwijl

$$P_1(A \cup B) = P_2(A \cup B) = X$$

In navolging van [83] wordt in [65] aangehaald dat

$$P_2(A \cup B) \supseteq P_2(A) \cup P_2(B)$$

Er geldt inderdaad voor alle x in X

$$P_2(A \cup B)(x) = \frac{|Rx \cap (A \cup B)|}{|Rx|} = \frac{|(Rx \cap A) \cup (Rx \cap B)|}{|Rx|}$$

en dus ook

$$P_2(A \cup B)(x) \geq \max\left(\frac{|Rx \cap A|}{|Rx|}, \frac{|Rx \cap B|}{|Rx|}\right) = (P_2(A) \cup P_2(B))(x)$$

Dat de gelijkheid niet noodzakelijk opgaat, werd reeds duidelijk in Voorbeeld 8.23. Men kan in beide gevallen (zowel voor P_1 als voor P_2) uit de lidmaatschapsfuncties geassocieerd aan A en B dus slechts een benedengrens berekenen voor de lidmaatschapsfunctie geassocieerd aan de unie van A en B . In [65] besluit men hieruit dat “*the rough membership function can be regarded formally as a generalization of fuzzy membership*”. De motivering hiervoor is dus m.a.w. dat er niet altijd een eenduidig antwoord kan gegeven worden op het volgende vraagstuk: gegeven de lidmaatschapsfuncties geassocieerd aan twee “geheime” verzamelingen A en B , wat is de lidmaatschapsfunctie geassocieerd met $A \cup B$? Ook dit argument is in wezen afhankelijk van de keuze van het constructieproces van de lidmaatschapsfunctie. Bij P_1 wordt alle info over A a.h.w. weggegooid,

behalve de kennis van onder- en bovenbenadering. De ware gedaante van het vraagstuk dat Pawlak aanzet om te concluderen dat ruwverzamelingen algemener zijn dan vaagverzamelingen, is dus eigenlijk: gegeven de ruwverzamelingen van twee “geheime” verzamelingen A en B , wat is de ruwverzameling van $A \cup B$? Bij P_2 schijnt het iets ingewikkelder omdat $P_2(A)$ op iets meer steunt dan de kennis van $\underline{R}A$ en $\overline{R}A$ zoals we getoond hebben in Voorbeeld 8.19, maar ook hier blijft de kern van het probleem dat er blijkbaar te veel informatie weggegooid wordt. Laat de afbeelding $\mathbb{P}_2$ gedefinieerd zijn als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2 : (X, X \times X) &\rightarrow \mathcal{F}(X) \\ (A, R) &\mapsto P_2(A) \end{aligned}$$

dan kunnen we samenvattend stellen dat Biswas in [6] geïllustreerd heeft dat $\mathbb{P}_2$ geen surjectie is, terwijl in [65] aangehaald wordt dat het geen injectie is. De stukjes van de puzzel samenlegend, hebben ze dus bewezen dat $\mathbb{P}_2$ geen bijectie is tussen enerzijds de klasse van ruwverzamelingen in X (zeer ruim opgevat als de unie van alle klassen van ruwverzamelingen in om het even welke benaderingsruimte (X, R)) en anderzijds de klasse van vaagverzamelingen in X . Het bestaan van een dergelijke bijectie is daarmee echter niet uitgesloten.

Dergelijke techniciteiten zijn leuke denkspelletjes maar gaan voorbij aan de essentie van de zaak. Vaagverzamelingenleer is op poten gezet voor de wiskundige representatie en manipulatie van vage (linguïstische) informatie. De vaagverzamelingenleer bestudeert de graad van lidmaatschap van een element tot een klasse. Ruwverzamelingenleer daarentegen is ontworpen als een instrument dat ons toelaat om te gaan met onvolledige informatie. Door de onvolledigheid van die informatie treedt er onzekerheid op die kan opgeheven worden door het geven van bijkomende informatie. Stel b.v. dat we een lijst van mensen hebben. Van elk individu op de lijst kennen we slechts de geboortedatum, of het individu wel of geen legerdienst gedaan heeft en tenslotte het geslacht. We weten bovendien dat er iemand achter de deur staat die geboren is op 28-02-1944 en die legerdienst gedaan heeft. Gevraagd wordt een uitspraak te doen over het geslacht van die persoon. Op basis van de onvolledige informatie over die persoon kan de ruwverzamelingenanalyse zich nu uitspreken of het niet mogelijk, mogelijk of zeker is dat het hier om een man gaat. De ruwverzamelingenleer kan daar zelfs een getal tussen 0 en 1 op plakken dat de mogelijkheid aangeeft dat het om een man gaat (of indien het getal 1 is: de zekerheid). Het is echter verwarrend (en daarom verkeerd) om naar dit getal te verwijzen als lidmaatschap. Het lidmaatschap van de persoon achter de deur in de verzameling van de mannen is 0 of 1; de onzekerheid om welk van beide waarden het gaat, wordt opgeheven wanneer de deur openzwaait. Heel anders kan het gesteld zijn met het lidmaatschap van die persoon in de vaagverzameling *tamelijk oud*. Dit kan wel degelijk een getal tussen 0 of 1 zijn en blijven, zelfs nadat de deur open gegaan is.

Het is zeker niet ondenkbaar dat vaagheid en onvolledigheid van informatie samen optreden, wat het zinvol maakt om hybride technieken te bestuderen die beide combineren. De ruwverzamelingenleer veronderstelt dat de verzamelingen

van voorbeelden A scherp zijn, en ook de relatie R die de benaderingsruimte karakteriseert is scherp. Het is soms veel realistischer om de groep van voorbeelden te zien als een vaagverzameling, denken we b.v. aan “jonge wetenschappers” of “dure restaurants”. In Hoofdstuk 5 hebben we bovendien reeds uitvoerig besproken dat ononderscheidbaarheid, of benaderende gelijkheid, een vaag begrip is dat kan gemodelleerd worden door een vage gelijkaardigheidsrelatie R . Het werkterrein wordt op die manier ingekleed als een vage benaderingsruimte (X, R) , waarin de ruuvaagverzamelingenleer tot leven komt (zie b.v. [17], [86]).

8.24. Definitie (Onder- en bovenvaagruwbenadering). Zij $\mathcal{T}$ een triangulaire norm op $[0, 1]$, $\mathcal{I}$ een implicator op $[0, 1]$, (X, R) een vage benaderingsruimte en A een vaagverzameling in X . De onder- en de bovenvaagruwbenadering van A zijn dan respectievelijk de vaagverzamelingen $\underline{R}A$ en $\overline{R}A$ in X gedefinieerd als

$$\begin{aligned}\underline{R}A(y) &= \inf_{x \in X} \mathcal{I}(R(x, y), A(x)) \\ \overline{R}A(y) &= \sup_{x \in X} \mathcal{T}(A(x), R(x, y))\end{aligned}$$

voor alle y in X .

Men ziet onmiddellijk dat de bovenvaagruwbenadering van A het direct beeld $R\uparrow A$ van A onder R is, terwijl de ondervraagruwbenadering het superdirect beeld $R\downarrow A$ van A onder R is (cfr. Definitie 7.1). Eigenschap 7.33 garandeert dat de ondervraagruwbenadering van A begrepen is in A , die op haar beurt weer begrepen is in de bovenvaagruwbenadering van A .

Het grensgebied tussen de boven- en de ondervraagruwbenadering kan m.b.v. het vaagtheoretisch verschil gedefinieerd worden als $\overline{R}A \cap co \underline{R}A$. Merk op dat dit gebied op formeel vlak overeenkomt met het grensgebied tussen dilatatie en erosie dat bepaald wordt voor randdetectie in beelden. Zoals we even aangehaald hebben in het begin van deze sectie, noemen sommigen een verzameling A “rough” indien $\underline{R}A = \overline{R}A$ (zie [65]), m.a.w. indien het grensgebied niet leeg is. In dit geval zijn er inderdaad elementen waarvan men werkelijk niet met zekerheid kan zeggen of ze wel of niet behoren tot het concept, wat een benaming als “ruw” voor de verzameling van voorbeelden A rechtvaardigt. Wanneer in het vaagruwe geval gewerkt wordt in een vage benaderingsruimte gekarakteriseerd door een vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie en wanneer de bovenvaagruwbenadering (of het direct beeld) genomen wordt m.b.v. een triangulaire norm waarvan de partiële afbeeldingen supmorfismen zijn, en bovendien zijn residuele implicator gebruikt wordt voor de ondervraagruwbenadering (het superdirect beeld), dan wordt uit

$$\begin{aligned}R\downarrow(R\downarrow A) &= R\downarrow A \text{ en } R\uparrow(R\downarrow A) = R\downarrow A \\ R\downarrow(R\uparrow A) &= R\uparrow A \text{ en } R\uparrow(R\uparrow A) = R\uparrow A\end{aligned}$$

(zie Gevolg 7.36 en 7.38) duidelijk dat de onder- en de bovenvaagruwbenaderingen van een vaagverzameling A onder een vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie R de naam “ruw” niet verdienen. Dit geldt a fortiori voor de (gewone) onder- en bovenbenadering van een verzameling A in een benaderingsruimte (X, R) waarbij R een equivalentierelatie is. In de praktijk betekent dit o.m. dat door het

herhaalde malen na elkaar nemen van onder- en bovenbenadering de verzameling van elementen die mogelijk of zeker behoren tot het concept niet verandert, m.a.w. dat men niet meer of minder zekerheid krijgt. Merk op dat deze garantie niet bestaat indien de (vaag)relatie R in kwestie niet $(\mathcal{T})$ -transitief is, zoals geïllustreerd werd in Voorbeeld 8.3. Zolang R reflexief is, is wegens Eigenschap 7.33 wel gegarandeerd

$$R\downarrow(R\downarrow A) \subseteq R\downarrow A \subseteq A \subseteq R\uparrow A \subseteq R\uparrow(R\uparrow A) \quad (8.6)$$

maar de gelijkheden gaan niet noodzakelijk op. Dit betekent dus dat door het herhaalde malen na elkaar nemen van de onder(ruwvaag)benadering, het aantal elementen waarvan men zeker is, kan beginnen afnemen, terwijl door het na elkaar nemen van de boven(vaagruw)benadering het aantal elementen die mogelijk tot het concept behoren steeds maar kan toenemen. Dit laatste fenomeen (corresponderend met de laatste inclusie in (8.6)) doet zich voor omdat de bovenvaagruwbenadering van A ruimer is dan A zelf en er dus elementen kunnen zijn die lijken op elementen uit $\overline{R}A$ maar niet noodzakelijk ook op elementen uit A . Dit vertoont sterke gelijkenissen met de ideeën die liggen aan de basis van de representaties die we in Hoofdstuk 7 voorgesteld hebben voor tamelijk en een beetje. Een analoge redenering kan gemaakt worden voor de ondervraagruwbenadering en de representatie van de versterkende wijzigers zeer en extreem.

In deze sectie hebben we een aantal keer de begrippen “mogelijk” en “zeker” laten vallen. Deze concepten zijn reeds op verschillende manieren bestudeerd en geformaliseerd, o.m. in het kader van modale logica. De manier waarop men er in deze logica tegenaan kijkt, vertoont sterke gelijkenissen met de ideeën achter de representatie van verzwakkende en versterkende linguïstische wijzigers m.b.v. van L -vaagrelationele wijzigers a.d.h.v. gelijkaardigheidsrelaties zoals uiteengezet in Hoofdstuk 7. Grof geschetst wordt een uitdrukking “ x is zeker P ” in modale logica geïnterpreteerd als “alle y ’s die toegankelijk zijn vanuit x zijn P ”. Dit lijkt sterk op ons voorstel “ x is zeer A indien alle objecten y die op x lijken A zijn”, waarbij “toegankelijk” correspondeert met “lijken op”. Analooog wordt “ x is mogelijk P ” geïnterpreteerd als “een y die toegankelijk is vanuit x is P ”, wat sterk doet denken aan “ x is tamelijk P indien een y die lijkt op x P is”.

Het is in dit hoofdstuk duidelijk geworden dat het representationeel model dat we in Hoofdstuk 7 voorgesteld hebben voor linguïstische wijzigers zich a.h.w. bevindt in een kluwen van andere toepassingen die in mindere of meerdere mate verwant zijn met het probleem dat we in dit proefschrift aangepakt hebben. Het geleidelijk aan leren kennen van al deze domeinen heeft ons vertrouwen in de semantische kracht van L -vaagrelationele wijzigers buitengewoon gesterkt.

Samenvatting

De kracht van menselijke communicatie en redeneren is voor een groot deel te danken aan het gebruik van natuurlijke taal. L -vaagverzamelingenleer is een formalisme waarbinnen linguïstische termen wiskundig kunnen gemodelleerd worden. Gewijzigde linguïstische termen komen in de taal tot stand door het toepassen van een linguïstische wijziger op een term. De constructie van geschikte L -vaagverzamelingen voor de betrokken linguïstische termen is meestal één van de moeilijkste opdrachten bij het ontwerpen van een toepassing. Goede representaties van linguïstische wijzigers laten echter de automatische constructie van L -vaagverzamelingen voor gewijzigde termen toe. In het merendeel van de bestaande literatuur gebruikt men als tralie L het reële eenheidsinterval $[0, 1]$; in de $[0, 1]$ -vaagverzamelingenleer kan echter geen onvergelykbaarheid t.o.v. linguïstische termen gemodelleerd worden. Omdat dergelijke onvergelykbaarheid wel aanwezig is in het dagelijkse taalgebruik, hebben we er bewust voor gekozen ons in dit proefschrift niet blind te staren op $[0, 1]$. Dit heeft ons o.m. geleid tot de ontwikkeling van een representationeel kader van L -vaagrelationele wijzigers waarbij L een complete tralie is.

Na situering en motivatie van ons onderzoek in een inleidend hoofdstuk, hebben we in Hoofdstuk 2 de nodige wiskundige bouwblokken uit de ordetheorie en de L -vaagverzamelingenleer gebundeld. In Hoofdstuk 3 hebben we vervolgens volop aandacht besteed aan het psycholinguïstisch aspect van ons onderzoek. Vanuit bestaande studies, eigen verwerking van experimentele gegevens en onze intuïtie hebben we verwachtingen gecreëerd naar vaagverzamelingtheoretische modellen voor linguïstische wijzigers toe. Daarbij werd o.m. de nood aan zowel een inclusieve als een niet-inclusieve representatie duidelijk.

De zoektocht naar geschikte representaties (d.w.z. geschikte L -vaagwizigers) ving aan bij een studie van de bestaande. In Hoofdstuk 4 hebben we vastgesteld dat de traditionele modellen veelal opsplitsbare vaagwizigers zijn. We hebben een onderscheid gemaakt tussen beperkende en uitbreidende vaagwizigers, en ook tussen vaagwizigers met zuivere voor- of nawijziging. Na een onderzoek van algemene eigenschappen van de vaagwizigers uit deze klassen, hebben we de verheffende en de verschuivende vaagwizigers verder doorgelicht als prototypes van de vaagwizigers respectievelijk met zuivere na- en voorwijziging. Hierbij werd duidelijk dat deze vaagwizigers belangrijke tekortkomingen hebben, enerzijds op semantisch vlak, en anderzijds op vlak van algemene toepasbaarheid.

Als voorbereiding op het ontwerpen van L -vaagwizigers met een duidelijke

inherente semantiek hebben we vervolgens een kleine zijsprong gemaakt in de richting van het modelleren van benaderende gelijkheid. In Hoofdstuk 5 hebben we aangetoond dat L -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties niet compatibel zijn met de Poincaré paradox en dus niet geschikt voor de representatie van benaderende gelijkheid. We hebben daarom de conditie van $\mathcal{T}$ -transitiviteit vervangen door een pseudo-metrisch gebaseerde voorwaarde, wat aanleiding gaf tot het concept “gelijkaardigheidsrelatie”.

In Hoofdstuk 6 hebben we een eigen kijk gegeven op de horizonaanpak, een model met een duidelijke semantiek dat recent ontwikkeld werd voor de representatie van linguïstische termen in de inclusieve interpretatie in een numeriek universum. Onze eigen visie maakte een uitbreiding mogelijk, zowel naar niet-numerieke universa als naar de niet-inclusieve interpretatie. We voerden daarbij concepten in als “gezichtsvermogen” en “horizongenerator”. We toonden aan hoe bepaalde horizongeneratoren horizonfuncties voortbrengen die kunnen beschouwd worden als veralgemeningen van typische bekende lidmaatschapsfuncties zoals de S - en de π -lidmaatschapsfunctie. Hoewel de semantiek in dit representationeel schema veel beter ingevuld is dan bij de opsplitsbare vaagwijzigers van de eerste generatie en onze uitbreiding een gebruik in een willekeurige pseudo-metrische ruimte als universum mogelijk maakt, ervoerden we het als een beperking dat de vorm van de lidmaatschapsfunctie van de atomaire term vanuit het model opgedrongen wordt.

In Hoofdstuk 7 ontwikkelden we daarom een context gebaseerde aanpak voor de modellering van linguïstische wijzigers. Uitgangspunt daarbij is om bij het bepalen van de mate waarin een element x behoort tot b.v. zeer A niet enkel te kijken in welke mate x behoort tot A , maar ook de elementen uit de context van x in rekening te brengen. De notie van context wordt gerepresenteerd door een L -vaagrelatie, wat op formeel vlak leidt tot het nemen van het direct en het superdirect beeld van een L -vaagverzameling onder een L -vaagrelatie. Na een uitgebreid onderzoek van algemene eigenschappen van deze zogenaamde L -vaagrelationele wijzigers hebben we hun toepasbaarheid voor de modellering van linguïstische wijzigers aangetoond in representationele schema’s en voorbeelden. Het werd daarbij duidelijk dat ze niet behept zijn met de semantische tekortkomingen van de vaagwijzigers van de eerste generatie en dat ze algemeen bruikbaar zijn, ook in niet-numerieke universa, zelfs wanneer de lidmaatschapsgraden worden genomen in een complete tralie L die verschillend is van het reële eenheidsinterval. Op vlak van algemene toepasbaarheid en van semantische kracht steken onze L -vaagrelationele wijzigers dan ook met kop en schouders uit boven de traditionele modellen.

Om de semantische kracht van de vaagrelationele wijzigers verder te onderstrepen, hebben we in Hoofdstuk 8 tenslotte een staal gegeven van hun mogelijke rol in een ruimer kader: als openings- en sluitingsoperatoren, als operatoren die topologieën induceren, als vaagmorfologische operatoren en tenslotte als operatoren die aanleiding geven tot de onder- en de bovenvaagruwbenadering in de vaagruwverzamelingenleer. De toepassingsmogelijkheden in al deze domeinen heeft ons vertrouwen in de semantische kracht van L -vaagrelationele wijzigers buitengewoon gesterkt.

Summary

The power of human communication and reasoning is largely due to the use of natural language. L -fuzzy set theory is a formalism in which linguistic terms can be modelled mathematically. Modified linguistic terms arise in natural language by applying a linguistic modifier to a term. The construction of suitable L -fuzzy sets for the linguistic terms involved is often one of the most difficult tasks when developing an application. Good representations of linguistic modifiers however allow for the automatic construction of L -fuzzy sets for modified terms. In the larger part of the literature the lattice L is the real unit interval $[0, 1]$; $[0, 1]$ -fuzzy set theory however is not adequate to model incomparability w.r.t. linguistic terms. Since such incomparability is present in everyday language, we have chosen not to restrict our view to $[0, 1]$. Among other things, this has led us to the development of a representational framework of L -fuzzy relational modifiers, for L a complete lattice.

After situating and motivating our research in an introductory chapter, in Chapter 2 we have gathered all necessary mathematical building-blocks from order theory and L -fuzzy set theory. Next in Chapter 3 we have devoted our attention to the psycholinguistic aspect of our research. Departing from existing studies, processing of experimental data and our intuition, we have created expectations towards fuzzy set theoretical models for linguistic modifiers. Among other things the need for an inclusive and a non-inclusive interpretation became clear.

The search for suitable representations (i.e. suitable L -fuzzy modifiers) began with a study of the existing ones. In Chapter 4 we have established that the traditional models are mostly decomposable fuzzy modifiers. We have distinguished between restricting and expanding fuzzy modifiers, and also between fuzzy modifiers with pure pre- or postmodification. After a study of general properties of these classes of fuzzy modifiers, we have further examined the powering and shifting fuzzy modifiers as prototypes of the fuzzy modifiers with pure post- and premodification respectively. It became clear that these fuzzy modifiers have significant shortcomings, on one hand on the semantical level, and on the other on the level of general applicability.

Preparing the development of L -fuzzy modifiers with a clear inherent semantics, next we have walked a bit sideways towards the modelling of approximate equality. In Chapter 5 we have shown that L -fuzzy $\mathcal{T}$ -equivalence relations are not compatible with the Poincaré paradox and hence not suitable for the re-

presentation of approximate equality. Therefore we have replaced the condition of $\mathcal{T}$ -transitivity with a pseudo-metric based criterion, which gave rise to the concept of “resemblance relation”.

In Chapter 6 we have given our view on the horizon approach, a model with a clear semantics that was recently developed for the representation of linguistic terms in the inclusive interpretation in a numerical universe. Our own view allowed for an extension, as well towards non-numerical universes as towards the non-inclusive interpretation. To this end we introduced concepts such as “quality of vision” and “horizon generator”. We showed how certain horizon generators generate horizon functions that can be seen as generalizations of known typical membership functions such as S - and π -membership functions. Although, compared to the decomposable fuzzy modifiers of the first generation, in this representational schemes the semantics is clearly better taken care off, and our extension furthermore allows for a use in an arbitrary pseudo-metric space as a universe, we considered it a shortcoming that the shape of the membership function of the atomic term is forced from within the model.

In Chapter 7 we therefore developed a context based approach for the modelling of linguistic modifiers. The starting point is the following: when determining the degree to which an element x belongs to e.g. **very** A , one should not only look at the degree to which x belongs to A , but also take the elements in the context of x into account. The notion of context is represented by an L -fuzzy relation, which on the formal level gives rise to the direct and the superdirect image of an L -fuzzy set under an L -fuzzy relation. After an extensive study of general properties of these so-called L -fuzzy relational modifiers, in representational schemes and examples we have shown their applicability for the modelling of linguistic modifiers. It became clear that they are not afflicted with the semantical shortcomings of the fuzzy modifiers of the first generation and that they are very generally applicable, even in non-numerical universes, even when the membership degrees are taken in a complete lattice L different from the real unit interval. On the level of general applicability and semantical power they stand head and shoulders above the traditional models.

To further stress the semantical power of the fuzzy relational modifiers, in Chapter 8 we have given a sample of their possible role in a broader framework: as opening and closure operators, as operators inducing topologies, as fuzzy morphological operators and finally as operators that give rise to the lower and upper fuzzy rough approximation in fuzzy rough set theory. The possible applications in all these domains have given us deep confidence in the semantical power of L -fuzzy relational modifiers.

Bibliografie

- [1] R. Babuška. *Fuzzy Modeling for Control*. Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 1998.
- [2] H. Bandemer en S. Gottwald. *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Fuzzy Methods*. John Wiley and Sons, Chisester, 1995.
- [3] W. Bandler en L. Kohout. Fuzzy power sets and fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:13–30, 1980.
- [4] W. Bandler en L. Kohout. Fuzzy relational products as a tool for analysis and synthesis of the behaviour of complex natural and artificial systems. In S. K. Wang en P. P. Chang, editors, *Fuzzy Sets: Theory and Application to Policy Analysis and Information Systems*, pagina's 341–367. Plenum Press, New York and London, 1980.
- [5] G. Birkhoff. *Lattice Theory*, volume XXV of *AMS Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1973. 3e editie, 2e druk (1e editie: 1940).
- [6] R. Biswas. Rough sets are fuzzy sets. *Busefal*, 83:24–31, 1985.
- [7] U. Bodenhofer. *A Similarity-Based Generalization of Fuzzy Orderings*, volume C 26 of *Schriftenreihe der Johannes-Kepler-Universität Linz*. Universitätsverlag Rudolf Trauner, 1999.
- [8] D. Botteldooren, A. Verkeyn, C. Cornelis, en M. De Cock. On the meaning of noise annoyance modifiers: a fuzzy set theoretical approach. *Acta Acustica united with Acustica*, 2002. ter perse.
- [9] B. Bouchon-Meunier. Stability of linguistic modifiers compatible with a fuzzy logic. In *Uncertainty and Intelligent Systems*, pagina's 63–70. Springer-Verlag, 1988.
- [10] B. Bouchon-Meunier. *La Logique Floue*, volume 2702 of *Que sais-je?* Paris, 1993.
- [11] B. Bouchon-Meunier en Y. Jia. Linguistic modifiers and imprecise categories. *International Journal of Intelligent Systems*, 7:25–36, 1992.

- [12] H. J. Bremermann. Optimization through evolution and recombination. In M.C. Yovits, G. T. Jacobi, en G. D. Goldstein, editors, *Self organizing systems*, pagina's 93–106. Spartan Books, Washington D.C., 1962.
- [13] C.-C. Chan en J. W. Grzymala-Busse. On the lower boundaries in learning rules from examples. In E. Orłowska, editor, *Incomplete Information: Rough Set Analysis*, volume 13 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pagina's 58–74. Physica-Verlag, 1998.
- [14] C.L. Chang. Fuzzy topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24:182–190, 1968.
- [15] R. Cleeren. *Modellering van Linguïstische uitdrukkingen d.m.v. de Theorie der Vage Verzamelingen*. Licentiaatsverhandeling, Universiteit Gent, 1992.
- [16] R. Cleeren, R. Vandenberghe, N. Van Gyseghem, en R. De Caluwe. The modelling of vague predicates used in linguistic expressions by means of fuzzy set theory. In *Proceedings of IFSA 1993 (Fifth International Fuzzy Systems Association World Congress)*, pagina's 54–57, 1993.
- [17] H. Prade D. Dubois. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems*, 17(2-3):191–209, 1990.
- [18] B. De Baets. *Oplossen van vaagrelatieve vergelijkingen : een ordetheoretische benadering*. PhD thesis, Universiteit Gent, 1995.
- [19] B. De Baets. Fuzzy morphology: a logical approach. In B. Ayyub en M. Gupta, editors, *Uncertainty Analysis in Engineering and Sciences: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach.*, pagina's 53–67. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
- [20] B. De Baets en R. Mesiar. Pseudo-metrics and T-equivalences. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 5(2):471–481, 1997.
- [21] B. De Baets en R. Mesiar. Triangular norms on product lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 104:61–75, 1999.
- [22] M. De Cock. Representing the adverb very in fuzzy set theory. In A. Todirascu, editor, *Proceedings of the ESSLLI99 Student Session (11th European Summer School in Logic, Language and Information)*, pagina's 223–232, 1999.
- [23] M. De Cock. Fuzzy hedges: a next generation. In K. Striegnitz, editor, *Proceedings of the ESSLLI'2001 Student Session (13th European Summer School in Logic, Language and Information)*, pagina's 59–70, 2001.
- [24] M. De Cock. A new generation of fuzzy hedges. *The European Student Journal of Language and Speech*, 2002. te verschijnen.

- [25] M. De Cock, U. Bodenhofer, en E. E. Kerre. Modelling linguistic expressions using fuzzy relations. In *Proceedings IIZUKA2000 (6th International Conference on Soft Computing)*, pagina's 353–360, 2000. (CD-ROM).
- [26] M. De Cock en E. E. Kerre. A new class of fuzzy modifiers. In *Proceedings ISMVL 2000 (30th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic)*, pagina's 121–126. IEEE Computer Society, 2000.
- [27] M. De Cock en E. E. Kerre. Approximate equality is no fuzzy equality. In *Proceedings of EUSFLAT2001 (International Conference European Society for Fuzzy Logic and Technology)*, pagina's 369–371, 2001.
- [28] M. De Cock en E. E. Kerre. Fuzzy topologies induced by fuzzy relation based modifiers. In B. Reusch, editor, *Computational Intelligence: Theory and Applications; Proceedings of the 7th Fuzzy Days Dortmund*, volume 2206 of *Lecture Notes in Computer Science*, pagina's 239–248, 2001.
- [29] M. De Cock en E. E. Kerre. Linguistic variables: a powerful concept for knowledge representation. *International Journal of Computing Anticipatory Systems*, 8:174–189, 2001.
- [30] M. De Cock en E. E. Kerre. The representation of linguistic hedges using fuzzy relational calculus. In *Proceedings of Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, volume 3, pagina's 1608–1613, 2001.
- [31] M. De Cock en E. E. Kerre. Fuzzy modifiers based on fuzzy relations. *Information Sciences*, 2002. ter perse.
- [32] M. De Cock en E. E. Kerre. On (un)suitable fuzzy relations to model approximate equality. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002. ter perse.
- [33] M. De Cock en E. E. Kerre. Rejoinder: Why fuzzy $\mathcal{T}$ -equivalence relations do not resolve the Poincaré paradox, and related issues. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002. ter perse.
- [34] M. De Cock, E. E. Kerre, en A. M. Radzikowska. Modelling linguistic modifiers using fuzzy-rough structures. In *Proceedings IPMU 2000 (8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems)*, volume III, pagina's 1735–1742, 2000.
- [35] M. De Cock, M. Nachtegaal, en E. E. Kerre. Images under fuzzy relations : a master-key to fuzzy applications. In D. Ruan, H. A. Abderrahim, P. D'hondt, en E. E. Kerre, editors, *Intelligent Techniques and Soft Computing in Nuclear Science and Engineering*, pagina's 47–54. World Scientific, 2000.

- [36] M. De Cock, A. Radzikowska, en E. E. Kerre. A fuzzy-rough approach to the representation of linguistic hedges. In B. Bouchon-Meunier, J. Gutierrez-Rios, L. Magdalena, en R. R. Yager, editors, *Technologies for Constructing Intelligent Systems*, volume I, pagina's 33–42. Springer, 2001.
- [37] M. De Cock, Z. Žabokrtský, en E. E. Kerre. Representing linguistic hedges by l-fuzzy modifiers. In *Proceedings of CIMCA'2001 (International Conference on Computational Intelligence for Modelling Control and Automation)*, pagina's 64–72, 2001. (CD-ROM).
- [38] G. De Cooman en E. E. Kerre. Order norms on bounded partially ordered sets. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 2(2):281–310, 1994.
- [39] S. Després. *Un apport à la conception de systèmes à base de connaissances: les opérations de déduction floues*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1988.
- [40] F. Devos. *Semantische vaagheid en de traditionele woordklassen*. Overdruk uit Handelingen XLVI der Koninklijke Nederlandse Maatschappij voor Taal- en Letterkunde en Geschiedenis, 1992.
- [41] F. Devos. Still fuzzy after all these years. A linguistic evaluation of the fuzzy set approach to semantic vagueness. *Quaderni di Semantica. An International Journal of Theoretical and Applied Semantics*, 16(1):47–82, 1995.
- [42] J. Dobráková. Indistinguishability and nearness. *Busefal*, 83:46–52, 2000.
- [43] C. Drossos en M. Navara. Matrix composition of t-norms. In E. P. Klement en S. Gottwald, editors, *Enriched Lattice Structures for Many-Valued and Fuzzy Logics, Proceedings of 18th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory*, pagina's 95–100, Austria, 1997.
- [44] U. Felscher-Suhr, R. Guski, en R. Schuemer. Some results of an international scaling study and their implications for noise research. In *Proceedings of Noise Effects*, pagina's 733–736, 1998.
- [45] M. Fréchet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22:1–74, 1906.
- [46] Y. Gentilhomme. Les ensembles flous en linguistique. *Cahier Linguistiques Theor. Appl.*, 5:47–63, 1968.
- [47] J. A. Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 18:145–174, 1967.
- [48] H. P. Grice. Further notes on logic and conversation. In P. Cole, editor, *Syntax and Semantics 9: Pragmatics*, pagina's 113–128. Academic Press, New York, 1978.

- [49] F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre*. Chelsea Publishing Company, New York, 1914.
- [50] H. Hellendoorn. *Reasoning with fuzzy logic*. PhD thesis, T. U. Delft, Delft, 1990.
- [51] H. M. Hersch en A. Caramazza. A fuzzy set approach to modifiers and vagueness in natural language. *Journal of Experimental Psychology : General*, 105(3):254–276, 1976.
- [52] J. Hoepelman. Adjectives and nouns: a new calculus. In A. von Stechow B. Rainer, C. Schwarz, editor, *Meaning, Use and Interpretation of Language*, pagina's 190–220. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1983.
- [53] U. Höhle. The poincaré paradox and non-classical logics. In E. P. Klement D. Dubois, H. Prade, editor, *Fuzzy Sets, Logics and Reasoning about Knowledge*, pagina's 7–16. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1999.
- [54] J. Kacprzyk en S. Zadrozny. On interactive linguistic summarization of databases via a fuzzy-logic-based querying add-on to microsoft access. In B. Reusch, editor, *Computational Intelligence: Theory and Applications; Proceedings of the 6th Fuzzy Days Dortmund*, volume 1625 of *Lecture Notes in Computer Science*, pagina's 462–472, 1999.
- [55] A. Kandel en G. Langholz. *Fuzzy Control Systems*. CRC Press, Inc., Boca Raton, 1994.
- [56] E. E. Kerre. Fuzzy topologizing with preassigned operations. In *Abstracts of International Congress of Mathematics*, Helsinki, 1978.
- [57] E. E. Kerre. A walk through fuzzy relations and their applications to information retrieval, medical diagnosis and expert systems. In B. M. Ayyub, M. M. Gupta, en L. N. Kanal, editors, *Analysis and Management of Uncertainty: Theory and Applications*, pagina's 141–151. Elsevier Science Publishers, 1992.
- [58] E. E. Kerre. *Introduction to the Basic Principles of Fuzzy Set Theory and Some of its Applications*. Communication and Cognition, Gent, 1993.
- [59] E. E. Kerre en M. De Cock. Linguistic modifiers: An overview. In G. Chen, M. Ying, en K.-Y. Cai, editors, *Fuzzy Logic and Soft Computing*, pagina's 69–85. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [60] E. E. Kerre en M. Nachtgael, editors. *Fuzzy Techniques in Image Processing*. Springer, Heidelberg Germany, 2000.
- [61] F. Klawonn. Should fuzzy equality and similarity satisfy transitivity? comments on the paper by m. de cock and e. kerre. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002. ter perse.

- [62] F. Klawonn en R. Kruse. Equality relations as a basis for fuzzy control. *Fuzzy Sets and Systems*, 54:147–156, 1993.
- [63] G. Klir en B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, 1995.
- [64] K. Köhler. Adaptive fuzzy modifiers. In *Proceedings of EUFIT'94 (European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing)*, 1994.
- [65] J. Komorowski, L. Polkowski, en A. Skowron. Rough sets: a tutorial, 1999.
- [66] M. Koyuncu, A. Yazici, en R. George. Flexible querying in an intelligent object-oriented database environment. In H. Larsen, J. Kacprzyk, S. Zadrozny, T. Andreasen, en H. Christiansen, editors, *Flexible Query Answering Systems; Recent Advances. Proceedings of the Fourth International Conference on Flexible Query Answering Systems*, pagina's 75–84. Physica-Verlag, 2000.
- [67] T. Kubinski. An attempt to bring logic near to colloquial language. *Studia Logica*, 10:61–75, 1960.
- [68] V. B. Kuz'min. A parametric approach to description of linguistic values of variables and hedges. *Fuzzy Sets and Systems*, 6:27–41, 1981.
- [69] G. Lakoff. Hedges : a study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts. *Journal of Philosophical Logic*, 2:458–508, 1973.
- [70] A.K. Mason en S. Korkmaz. Obtaining fuzzy membership functions and rule sets in fuzzy expert systems with AHP. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pagina's 2315–2319, 1998.
- [71] J. K. Mattila. *Calculus of modifier operators in fuzzy logic*, volume 14 of *Publications of the Institute for Applied Mathematics*. University of Turku, Finland, 1989.
- [72] D. McNeill en P. Freiberger. *Fuzzy Logic*. Simon & Schuster, New York, 1993.
- [73] M. Nachtegaal, M. De Cock, D. Van Der Weken, en E. E. Kerre. Fuzzy relational images in computer science. In *Proceedings of RELMICS6 (6th International Workshop on Relational Methods in Computer Science)*, 2002. aangeboden ter publicatie.
- [74] M. Nachtegaal en E. E. Kerre. Different approaches towards fuzzy mathematical morphology. In *Proceedings of EUFIT'99 (European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing)*, 1999. CD-ROM.

- [75] M. Nachtegael en E. E. Kerre. Classical and fuzzy approaches towards mathematical morphology. In E. E. Kerre en M. Nachtegael, editors, *Fuzzy Techniques in Image Processing*, pagina's 3–57. Springer-Verlag, Heidelberg, 2000.
- [76] M. Nachtegael en E. E. Kerre. Fuzzy logical operators on finite chains. *International Journal of General Systems*, 29(1):29–52, 2000.
- [77] V. Novák. *Fuzzy Sets and Their Applications*. Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [78] V. Novák. *The alternative mathematical model of linguistic semantics and pragmatics*, volume 8 of *International Series on Systems Science and Engineering*. Plenum Press New York and London, 1992.
- [79] V. Novák. A horizon shifting model of linguistic hedges for approximate reasoning. In *Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, New Orleans, 1996.
- [80] V. Novák en I. Perfilieva. Evaluating linguistic expressions and functional fuzzy theories in fuzzy logic. In L. A. Zadeh en J. Kacprzyk, editors, *Computing with Words in Information/ Intelligent Systems 1 (Foundations) [107]*, pagina's 383–406. Physica-Verlag, 1999.
- [81] V. Novák, I. Perfilieva, en J. Močkoř. *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 1999.
- [82] C. Paradis. *Degree Modifiers of Adjectives in Spoken British English*. Lund University Press, 1997.
- [83] Z. Pawlak. Rough sets. *International Journal of Computer and Information Science*, 11:341–356, 1982.
- [84] Z. Pawlak. Rough sets and fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 17:99–102, 1985. Short Communication.
- [85] H. Poincaré. *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion, Paris, 1902.
- [86] A. M. Radzikowska en E. E. Kerre. A comparative study of fuzzy rough sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 126:137–156, 2002.
- [87] R. K. Ragade en M. M. Gupta. Fuzzy set theory: introduction. In M. M. Gupta, G. N. Saridis, en B. R. Gaines, editors, *Fuzzy automata and decision processes*, pagina's 105–131. North-Holland, New York, 1977.
- [88] P. C. Rhodes en S. M. Menani. Towards a fuzzy logic programming system: a fuzzy propositional logic. *Knowledge-Based Systems*, 4:52–62, 1991.
- [89] E. Schwarz. Will computers ever think? on the difference of nature between machine and living organisms. *International Journal of Computing Anticipatory Systems*, 8:3–17, 2001.

- [90] B. Schweizer en A. Sklar. Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publ. Math. Debrecen*, 8:169–186, 1961.
- [91] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
- [92] F.-G. Shi. L-fuzzy relations and L-fuzzy subgroups. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 2:491–499, 2000.
- [93] H. Thiele. Interpreting linguistic hedges by concepts of functional analysis and mathematical logic. In *Proceedings of EUFIT '98 (European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing)*, volume I, pagina's 114–119, 1998.
- [94] L. Valverde. On the structure of F-indistinguishability operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 17:313–328, 1985.
- [95] C. Vanden Eynde. Een zeer lastig probleem: de modellering van de modificatie door zeer. een semantisch-pragmatische benadering, 1996. FKFO-project, private communicatie.
- [96] A. Verkeyn, M. De Cock, D. Botteldooren, en E. E. Kerre. Generating membership functions for a noise annoyance model from experimental data. In L. Reznik en V. Kreinovich, editors, *Soft computing in measurement and information acquisition*, Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer-Verlag, 2002. ter perse.
- [97] Q. Wei, G. Chen, en G. Wets. Modifying fuzzy association rules with linguistic hedges. In *Proceedings of NAFIPS2000 (19th International Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society)*, pagina's 397–401, 2000.
- [98] Y. Yandong. L-sets and L-universal algebras. In Paul P. Wang, editor, *Advances in Fuzzy Theory and Technology*, volume I, pagina's 91–114. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [99] J. F.-F. Yao en J.-S. Yao. Fuzzy decision making for medical diagnosis based on fuzzy number and compositional rule of inference. *Fuzzy Sets and Systems*, 120:351–366, 2001.
- [100] A. Yazici en R. George. *Fuzzy Database Modeling*, volume 26 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Physica-Verlag, 1999.
- [101] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [102] L. A. Zadeh. Fuzzy languages and their relation to human and machine intelligence. Technical Report ERLM302, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, 1971.
- [103] L. A. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, 3:177–200, 1971.

- [104] L. A. Zadeh. A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges. *Journal of Cybernetics*, 2(3):4–34, 1972.
- [105] L. A. Zadeh. Calculus of fuzzy restrictions. In L. A. Zadeh, K.-S. Fu, K. Tanaka, en M. Shimura, editors, *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes*, pagina's 1–40. Academic Press Inc., 1975.
- [106] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I, II, III. *Information Sciences*, 8:199–249, 301–357, 9:43–80, 1975.
- [107] L. A. Zadeh en J. Kacprzyk, editors. *Computing with Words in Information/Intelligent Systems 1 (Foundations)*, volume 33 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.
- [108] R. Zenner, R. De Caluwe, en E. E. Kerre. Practical determination of document description relations in document retrieval systems. In *Proceedings of the Workshop on the Membership Function, EIASM*, pagina's 127–138, 1984.
- [109] R. Zenner, R. De Caluwe, en E. E. Kerre. A new approach to information retrieval systems using fuzzy expressions. *Fuzzy Sets and Systems*, 17:9–22, 1985.
- [110] H.-J. Zimmermann. *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

Index

- L -vaagrelatie, 36
 - $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie, 37, 77
 - $\mathcal{T}$ -preorde, 37
 - $\mathcal{T}$ -transitief, 36
 - inverse, 36
 - naverzameling, 36
 - reflexief, 36
 - sup- $\mathcal{T}$ -compositie, 36
 - sup- $\mathcal{T}$ -samenstelling, 36
 - superproduct, 112
 - symmetrisch, 36
 - voerverzameling, 36
- L -vaagverzameling, 33
 - complement, 34
 - doorsnede, 34
 - drager, 34
 - genormaliseerd, 34
 - kern, 34
 - normaal, 34
 - unie, 34
- absorptiebeginsel, 26
- afbeelding
 - identieke, 38
 - samengestelde, 36
- aftakkingsprincipe, 27
 - zwak, 33
- antoniem, 41
- bedekkingsrelatie, 18
- beeld
 - direct beeld, 109
 - Kerre superdirect beeld, 111
 - superdirect beeld, 109
- begrensd, 18
- benaderende gelijkheid, 80
- benaderingsruimte, 160
- blokkerend punt, 38
- bovenbenadering, 160
- bovengrens, 18
- bovenvaagruwbenadering, 167
- complement, 19, 34
- complementering, 63
- concentratie, 68
- contrastintensificator, 64
- dalend, 19
- dilatatie, 68, 159
- driedeling
 - linguïstische, 41
- equivalentierelatie, 75
- erosie, 159
- extensie, 41
- familie, 19
- gelijkaardigheidsrelatie, 83
- gezichtsvermogen, 91
- grammatica
 - taal voortgebracht door, 40
 - termen-, 40
- grootste element, 18
- Hasse-diagram, 18
- homothetie, 38
- hoogte, 34
- horizon
 - functie, 92
 - generator, 92
- implicator, 26
 - residuele, 31
 - S-implicator, 27

- inclusie, mate van, 36
- infimum, 18
- intensie, 41
- interpretatie
 - linguïstische, 46
 - logische, 46
- inwendige, 148
- ketting, 18
- kleinste element, 18
- lidmaatschaps-, 33
 - functie, 33
 - π -lidmaatschapsfunctie, 44
 - algemene vorm, 43
 - lineair, 43
 - S-lidmaatschapsfunctie, 44
 - trapezoïdaal, 44
 - typisch, 43
 - graad, 33
- linkeruitbreiding, 112
- machtsfunctie, 38
- maximum, 18
- metriek, 81
 - S-metriek, 81
 - S-pseudo-metriek, 81
 - pseudo-metriek, 81
- minimax principe, 20
- minimum, 18
- modus ponens, 28, 30
- nawijziging, 60
- negator, 23
 - geïnduceerd, 27
 - involutief, 23
 - standaardnegator, 23
- niveauverzameling, 34
- normalisatie, 34
- nuldeler, 23
- onderbenadering, 160
- ondergrens, 18
- ondervraagruwbenadering, 167
- ononderscheidbaarheid, 160
- onvergelijkbaar, 18
- opening, 148
- openingsoperator, 148
- orderrelatie, 17
 - totaal, 18
- overlap, mate van, 35
- partiële afbeelding, 26
- partieel geordende verzameling, 17
 - begrensd, 18
- plint, 34
- Poincaré paradox, 76
 - compatibiliteit met, 76
- poset, 17
- rechterresiduüm, 28
- regel
 - betekenisgevend, 40, 41
 - syntactisch, 40
- residueringsvoorwaarde, 29
- ruwverzameling, 161
- scherpe verzameling, 34
- semantisch entailment, 46
- sluiting, 148
- sluitingsoperator, 148
- stemmen, 45
- stijgend, 19
- supremum, 18
- t-conorm, 23
- t-norm, 23
- tegengestelde functie, 37
- term
 - antoniem, 41
 - atomair, 41
 - gemiddelde, 41
 - gewijzigd, 41
 - linguïstisch, 40
 - primair, 41
 - samengesteld, 41
- termengrammatica, 40
- termenverzameling, 40
- tralie, 19
 - compleet, 19
 - distributief, 19
 - gecomplementeerd, 19
 - joinbewerking, 19

- meetbewerking, 19
- traliemorfisme, 20
 - infmorfisme, 20
 - joinmorfisme, 20
 - meetmorfisme, 20
 - supmorfisme, 20
- translatie, 38
- triangulaire conorm, 23
- triangulaire norm, 23
- vaagmorfologie, 158
- vaagruwverzamelingenleer, 160
- vaagtopologie, 153
- vaagverzameling, 34
- vast punt, 38
- veranderlijke
 - linguïstisch, 40
 - numeriek, 39
- voegwoord, 42
- voorwijziging, 60
- wijziger
 - L -vaagrelationeel, 107
 - L -vaagwijziger, 42
 - beperkend, 42, 59
 - opsplitsbaar, 60
 - uitbreidend, 42, 59
 - contrastintensificatie, 64
 - Köhler, 65
 - Kuz'min, 65
 - linguïstische, 41
 - nawijziger, 60
 - Rhodes-Menani, 64
 - stuksgewijs lineair, 63
 - verheffend, 65
 - verschuivend, 70
 - voorwijziger, 60